

המספר הקסום פאי π (מתקדם)

אנליזה מתמטית

- נוסחה של פרנסואה ויאטה, 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

- נוסחת גרגורי-לייבניץ, הקרויה על-שם ג'יימס גרגורי (1638-1675) ווילהלם לייבניץ. את הנוסחה גילה גרגורי ב-1672. היא מופיעה גם בספר Ganita-Yukti-Bhasa שכתב המתמטיקאי ההודי Jyesthadeva במחצית המאה ה-16, והמציג מחקרים שנערכו במרכז המחקר Madhava בעיר Kerala שבהודו. הנוסחה קובעת כי

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

(בהקשר רחב יותר, זהו הערך $x = 1$ בפיתוח לטור טיילור של $\arctan(x)$)

- מכפלת וואליס:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

- נוסחת האינטגרל של גאוסיאן (התפלגות נורמאלית):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- בעיית בזל נפתרה לראשונה על ידי לאונרד אוילר (ראו גם פונקציית זטא של רימן):

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

- פונקציית גמא (המהווה הכללה של פונקציית העצרת) בנקודה $1/2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

- נוסחת סטירלינג המשמשת לקירוב עצרת של מספרים גדולים:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- זהות אוילר המתבססת על נוסחת אוילר (שנקראה על ידי ריצ'רד פיינמן "הזהות המופלאה ביותר במתמטיקה", ומקשרת בין חמשת הקבועים המתמטיים הבסיסיים):

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

- שטחו של רבע מעיגול היחידה:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

• אינטגרל לא אמיתי נוסף:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \, dx = \pi$$

אנליזה מרוכבת

• יישום של משפט השאריות:

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

פיזיקה

$$\text{Time} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{length}}{\text{gravity}}} \quad \text{זמן המחזור של מטוטלת מתמטית הוא}$$

שברים משולבים

אפשר להציג את פאי באמצעות שברים משולבים רבים, בהם:

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \frac{11^2}{6 + \frac{13^2}{6 + \frac{15^2}{6 + \ddots}}}}}}}}$$

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \frac{5^2}{11 + \frac{6^2}{13 + \frac{7^2}{15 + \ddots}}}}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \frac{11^2}{2 + \frac{13^2}{2 + \frac{15^2}{2 + \frac{17^2}{2 + \ddots}}}}}}}}}}$$

תורת המספרים

בתורת המספרים יש קשר בין פאי לבין מספר תוצאות:

- ההסתברות ששני מספרים אקראיים יהיו זרים זה לזה היא $\frac{6}{\pi^2}$.
- ההסתברות שמספר אקראי יהיה ללא אף מחלק ריבועי היא $\frac{6}{\pi^2}$.
- מספר הדרכים הממוצע שבהן ניתן לכתוב מספר טבעי כסכום של שני מספרים ריבועיים הוא $\frac{\pi}{4}$.

כאן אנו מניחים שההסתברות והממוצע נלקחים על קבוצת המספרים הטבעיים עד N , כאשר N שואף לאינסוף.

בעיות פתוחות

בחקר מאפייניו של π מתקיימות בעיות פתוחות אחדות. הבולטת שבהן היא השאלה האם π הוא מספר נורמאלי - מספר ממשי שהספרות שלו מתנהגות כאילו הוגרלו באקראי, כאשר לכל ספרה יש הסתברות שווה להופיע. הידע בסוגיה זו מצומצם ביותר, ובין השאר לא ידוע האם בייצוג העשרוני של π כל אחת מהספרות $0, \dots, 9$ מופיעה אינסוף פעמים. בשנת 2000 הראו דייויד ביילי וריצ'רד קרנדל ששאלת הנורמאליות של π בבסיס בינארי שקולה להשערה ידועה בתורת הכאוס.