פתרון משוואה ממעלה שלישית

משוואה ממעלה שלישית או **משוואה מעוקבת** היא משוואה מהצורה $x^3+ax^2+bx+c=0$ כאשר a,b,c הם מקדמים בשדה נתון (למשל, המספרים הרציונליים). אם השדה ממאפיין שונה מ- 3, אפשר להציב $x=y-a/3$ ולקבל משוואה ממעלה שלישית שבה המקדם של y^2 הוא אפס.

היסטוריה

בעוד שאת המשוואה ממעלה שנייה ידעו לפתור היוונים (וכנראה גם הבבלים), פתרונה של המשוואה ממעלה שלישית לא היה ידוע עד תחילת המאה ה-16. המתמטיקאים באותו זמן עדיין לא 'הכירו' במספרים שליליים, וכך הם התייחסו למשוואות $x^3+px+q=0$ או $x^3+px=q$ (כאשר p,q שלמים חיוביים) כאל בעיות נבדלות.

ב-1515 גילה המתמטיקאי האיטלקי שיפיונה דל פרו איך לפתור חלק מן המשוואות ממעלה שלישית. באותה תקופה היו מתמטיקאים מתחרים זה בזה בפתרון משוואות, ולכן הסתיר דל פרו את הפתרון שלו. ב-1535 גילה האיטלקי ניקולו טרטליה מחדש את אותם פתרונות וסיפר עליהם לג'ירולמו קרדאנו, שהשלים את המקרים החסרים ופרסם אותם בספר. את המשוואה ממעלה רביעית הצליחו לפתור זמן קצר אחר-כך, ב-1545.

פתרונה של המשוואה ממעלה שלישית היה ההישג האמיתי הראשון של המתמטיקאים בראשית תקופת הרנסאנס, ובכך הוא סייע לשבור את ה'שיתוק' שאחז בהם מאז תחילת ימי הביניים. בנוסף, פתרונו של קרדנו 'אילץ' את המתמטיקאים להתייחס ברצינות למספרים המרוכבים, משום שפתרונות 'אמיתיים' (דהיינו, ממשיים) מתקבלים לפעמים תוך מניפולציות של מספרים מרוכבים.

פתרון משוואה ממעלה שלישית

כפי שהוסבר במבוא, אפשר להניח שהמקדם של x^2 במשוואה הוא 0. נפתור, אם כן, את המשוואה $x^3+px+q=0$ (כאשר p,q הם מקדמים כלשהם בשדה, ללא שום הנחות על היותם חיוביים).

אם נכתוב $x=\beta+\gamma$, אז

$x^3=\beta^3+\gamma^3+3\beta\gamma(\beta+\gamma)=\beta^3+\gamma^3+3\beta\gamma x$. נציב זאת במשוואה:

$\beta^3+\gamma^3+(3\beta\gamma+p)x+q=0$. כאן החלפנו משתנה אחד ($x$) בשניים ($\beta$ ו-γ), ולכן מותר להוסיף אילוץ חדש. אם נניח ש- $3\beta\gamma=-p$, המשוואה תהפוך להיות $\beta^3+\gamma^3=-q$. אבל מן האילוץ יוצא $\beta^3\gamma^3=-p^3/27$, כלומר שגם הסכום וגם המכפלה של β^3 ו- γ^3 ידועים. מן הסכום והמכפלה קל להרכיב משוואה ממעלה שנייה, שפתרונותיה הם β^3 ו- γ^3. על ידי הוצאת שורש שלישי אפשר למצוא את β, ומן האילוץ מקבלים גם את γ ולכן את סכומם x.

דוגמה

נפתור את המשוואה $y^3-6y^2-67y+360=0$. כדי להפטר מן המקדם של y^2, נציב $x=y-2$, כלומר $y=x+2$. המשוואה הופכת להיות $x^3-79x+210=0$.

נכתוב $x=\beta+\gamma$, כאשר $\gamma=79/(3\beta)$, והמשוואה תהפוך ל-

$\beta^6+210\beta^3+(79/3)^3=0$. זוהי משוואה ריבועית, שהפתרונות שלה הם

$\beta^3=-105\pm\frac{442}{9}\sqrt{-3}$. למעשה, מכיוון שהתפקידים של β ו- γ סימטריים מלכתחילה,

אפשר לבחור אחד מן השורשים ולהניח ש- $\beta^3=-105+\frac{442}{9}\sqrt{-3}$ (ואז

$\gamma^3=-105-\frac{442}{9}\sqrt{-3}$). כעת, לכל אחד משלושת הערכים (המרוכבים) של

$\beta=\sqrt[3]{-105+\frac{442}{9}\sqrt{-3}}$ יש לחשב את $\gamma=79/(3\beta)$, ומתקבל פתרון

$x=\beta+\gamma$ של המשוואה. הביטויים המתקבלים אמנם מסובכים למדי; שלושת הפתרונות למשוואה שלנו הם $x=-10,3,7$ (ולמשוואה המקורית $y=-8,5,9$).

פתרון משוואה ממעלה שלישית **באמצעות נוסחה**

עבור המשוואה: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ נפתור באמצעות הצבה בנוסחה הבאה:

$$q=\frac{3ac-b^2}{9a^2}$$

$$r=\frac{9abc-27a^2d-2b^3}{54a^3}$$

$$s = \sqrt[3]{r + \sqrt{q^3 + r^2}}$$

$$t = \sqrt[3]{r - \sqrt{q^3 + r^2}}$$

הערה: במקרה ובו מתקבל בתוך השורש הריבועי מספר שלילי, כך שבתוך השורש השלישי יש מספר מרוכב$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ אז יש לבחור את התוצאות כך שהזווית θתהיה זהה הן ב- sוהן ב-t.

הפתרונות הם:

$$x_1 = s + t - \frac{b}{3a},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i.$$

שיטת קארדנו

ראשית לפני שנציב בנוסחה לפתרון משוואה ממעלה שלישית לפי שיטה זו, עלינו לחלק את המשוואה הנ"ל במקדם של x^3כך שתתקבל לפנינו משוואה מן הצורה: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

עכשיו נציב:

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$

$$q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

$$x = -\frac{p}{3u} + u - \frac{a}{3}$$

שימו לב: u שווה לשורש שלישי של מספר מסוים ועל כן יש לו שלושה פתרונות אפשריים, שהם u_1, u_2, u_3. עבור כל u שנציב יתקבל פתרון שונה (ונכון) עבור x

היתרונות של השיטה הזו לעומת השיטה הקודמת שהנוסחה הרבה יותר קצרה וניתן ללמוד אותה בעל פה ביתר קלות, אולם השימוש במספרים מרוכבים בנוסחה זו מסובך יותר מבנוסחה הקודמת ועל כן יש המחשיבים נוסחה זו למסובכת מן השנייה.