

חקירת פונקציות

יש חשיבות מרובה לדעת את התנהגות הפונקציה בתחומים השונים.
עד עתה אנו קבלנו מספר כלים העוזרים לנו כגון נגזרות, מכסימום
ומינימום, פיתול וכד'.
נראה כלים נוספים שיעזרו לנו.

פונקציה סימטרית:

הסימטריה יכולה להיות כלפי צירים, נקודות או ישרים כלשהם.
נסתכל על הפונקציה ונבדוק סימטריה כלפי ציר x - אם נחליף
בפונקציה (במשוואה) ובמקום y נציב $-y$ ומשוואת הפונקציה לא
תשתנה.

סימטריה כלפי ציר y - אם נחליף במשוואה את x ונציב $-x$
והמשוואה לא תשתנה.

סימטריה כלפי הראשית - אם נחליף את x ואת y ונשים $-x$ ו $-y$
בהתאמה והמשוואה לא תשתנה.

סימטריה כלפי הישר $y=x$ אם נחליף ובמקום x נציב y
והמשוואה לא תשתנה.

דוגמא

$$y^2(x^2 - 4) = x^4$$

זו פונקציה שהיא סימטרית לגבי ציר X , לגבי ציר Y ולגבי הראשית.

חיתוך הפונקציה עם הצירים:

נקבל כאשר נציב בפונקציה $x=0$ החיתוך עם ציר y

נקבל כאשר נציב בפונקציה $y=0$ החיתוך עם ציר x

אסימפטוטות

אסימפטוטה היא הישר אשר אליו שואפת הפונקציה כאשר המשתנים

שואפים ל ∞ .

כל פונקציה מישורית ניתנת לכתיבה בצורה:

$$f_n(x) * y^n + f_{n-1}(x) * y^{n-1} + f_{n-2}(x) * y^{n-2} + + f_0(x) = 0 \quad 1.$$

$$g_n(y) * x^n + g_{n-1}(y) * x^{n-1} + g_{n-2}(y) * x^{n-2} + + g_0(y) = 0 \quad 2.$$

לדוגמא

$$4x^3y^3 - 5y^3x^2 + 2y^2x^4 - 3x^2y = 0 \quad \text{נתונה}$$

$$(4x^3 - 5x^2)y^3 + (2x^4)y^2 - (3x^2)y = 0 \quad \text{נסדר לפי חזקות יורדות של } y$$

$$(2y^2)x^4 + (4y^3)x^3 - (5y^3 - 3y)x^2 = 0 \quad \text{ולפי חזקות יורדות של } x$$

המקדמים של המשתנים הם פונקציות של המשתנה השני.

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^4 + 3x^2 - 2} \quad \text{או הדוגמא}$$

$$(x^4 + 3x^2 - 2)y = x^3 - 2x^2 + 3 \quad \text{נכפיל ואז נסדר לפי חזקות.}$$

אסימפטוטה הוא הגבול של הפונקציה כאשר המשתנה שואף ל ∞

אם נחלק את הפונקציות (1) ו(2) במשתנה y^n או ב x^n בהתאמה, המקדם שלו בלבד f_n או g_n ישארו ללא המשתנה וכל שאר האיברים יכילו במכנה חזקה כלשהיא של המשתנה, ואם נשאיף את המשתנה הזה ל ∞ , אזי כל האיברים ישאפו לאפס פרט למקדם הזה (ה- f_n או g_n) - ועל מנת לקיים את הפונקציה (המשוואה) גם המקדם הזה חייב להיות אפס.

באם המקדם של החזקה הגבוהה הוא **קבוע**, אזי לא יכולה להתקיים הפונקציה (המשוואה) ואז אין אסימפטוטה.

האסימפטוטות יכולות להיות אופקיות, אנכיות וישר בזווית כלשהיא.

אסימפטוטה אופקית - נסתכל על הפונקציה לפי חזקות יורדות של x אז המקדמים הם פונקציה של y . אם נשווה את המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הקיימת לאפס נקבל פתרונות של y והם האסימפטוטות האופקיות.

אסימפטוטה אנכיות - נסתכל על הפונקציה לפי חזקות יורדות של y אז המקדמים הם פונקציה של x . אם נשווה את המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הקיימת לאפס נקבל פתרונות של x והם האסימפטוטות האנכיות.

אסימפטוטה בזווית כלשהיא נקבל כאשר נציב בפונקציה במקום y

$$y = (mx + b)$$

לגבי אסימפטוטה בזווית יש לנו שני פרמטרים לקביעת הישר והם m ו b לכן ניקח את שני המקדמים של החזקות הגבוהות הקיימים

ואותם נשווה לאפס ומהן נקבל את m ו b אשר יקבעו את האסימפטוטה.

דוגמאות

1. נתונה הפונקציה $y^2x - y^2 - x^3 = 0$ מצא אסימפטוטות.

נסדר לפי חזקות יורדות לפי x $-x^3 + (y^2)x - y^2 = 0$

המקדם של החזקה הגבוהה היא קבוע (-1) ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

ולפי y $(x-1)y^2 - x^3 = 0$

המקדם הגבוה הוא $(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה בזוית

נציב במקום y $mx+b$ ונסדר לפי חזקות יורדות.

$$(x-1)(mx+b)^2 - x^3 = 0$$

$$(x-1)(m^2x^2 + 2bmx + b^2) - x^3 = 0$$

$$m^2x^3 + 2bmx^2 + b^2x - m^2x^2 - 2bmx - b^2 - x^3 = 0$$

נסדר לפי חזקות $(m^2-1)x^3 + (2bm-m^2)x^2 + (b^2-2bm)x - b^2 = 0$

נשווה לאפס את המקדמים הגבוהים

$$m^2 - 1 = 0 \quad | \quad 2bm - m^2 = 0$$

נקבל $m = \pm 1$ נציב במשוואה השניה לקבל את b

$$2b(1) - 1^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \text{כאשר } m=1$$

$$2b(-1) - (-1)^2 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \quad \text{וכאשר } m=-1$$

$$y = x + 0.5$$

$$y = -x - 0.5$$

משוואות האסימפטוטות הן

2. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$ מצא אסימפטוטות.

נכפיל $(x - 3)^2 y = x^2 - 9$ ונסדר לפי חזקות

$$(x - 3)^2 y - (x^2 - 9) = 0 \quad \text{לפי } y$$

נשווה את המקדם של y לאפס $(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה אנכית.

נסדר לפי חזקות של x $(x^2 - 6x + 9)y - (x^2 - 9) = 0$

$$x^2 y - 6xy + 9y - x^2 + 9 = 0$$

$$(y - 1)x^2 - (6y)x + (9y + 9) = 0$$

המקדם הגבוה $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

וזו אסימפטוטה אופקית.

נבדוק אסימפטוטות בזווית נציב במקום y את $mx + b$

$$(x^2 - 6x + 9)(mx + b) - (x^2 - 9) = 0$$

$$mx^3 - 6mx^2 + 9mx + bx^2 - 6bx + 9b - x^2 + 9 = 0$$

$$mx^3 + (b - 6m - 1)x^2 + (9m - 6b)x + (9b + 9) = 0$$

המקדם הגבוה הוא $m = 0$ במקרה זה השיפוע הוא אפס

ואין אסימפטוטה בזווית.

על מנת לראות התנהגות של פונקציה נבדוק:

א. את תחומי הקיום והגבולות של הפונקציה

ב. סימטריות

ג. נקודות חיתוך עם הצירים

ד. נקודות מינימום ומכסימום

ה. תחומי קעירות וקמירות של הפונקציה

ו. תחומים בהם הפונקציה עולה ובהן היא יורדת

ז. נקודות פיתול

ח. נקודות סינגולריות

ט. אסימפטוטות.

ומתוך כל אלו נוכל ללמוד כיצד הפונקציה מתנהגת.