פתרון משוואות

1 משוואות ריבועיות

1.1 שימוש בטרינום

על מנת לפתור טרינום עלינו לדעת לפרק את המשוואה הריבועית בצורה מסויימת. לא תמיד קל לראות את הדרך לפירוק לכן משתמשים בטרינום רק כאשר ניתן לראות במהירות את הפירוק. אם לא ניתן לראות במהירות את הפירוק עדיף להשתמש בנוסחת השורשים.

אז איך לפרק לפי טרינום? נסתכל על המשוואה הריבועית

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

אנו מחפשים דרך לפרק את bx לשני גורמים: αx ו- βx, כך שיתקיים: $\alpha + \beta = b$ וגם $\alpha\beta = ac$. במקרה זה נוכל לכתוב את המשוואה (1) כך:

$$ax^2 + \alpha x + \beta x + c = 0$$

וכעת לכנס איברים לפי קבוצות.

במקרה ש- $a = 1$ הפירוק לקבוצות הוא מיידי ונוכל לפרק ישר את (1) כך:

$$(x + \alpha)(x + \beta) = 0$$

ולקבל את הפתרונות. בכל מקרה לאחר כינוס האיברים לפי קבוצות יתקבלו שני הפתרונות של המשוואה.

1.1.1 $x^2 + 4x - 12 = 0$ (1)

על ידי שימוש בטרינום נקבל:

$$(x + 6)(x - 2) \quad = \quad 0$$

ומכאן נקבל ש- $x = 2$ או $x = -6$

1.1.2 $4x^2 - 52x + 160 = 0$

תחילה נוציא גורם משותף ואז נשתמש בטרינום.

$$\begin{aligned} 4(x^2-13x+40) &= 0 \\ 4(x-5)(x-8) &= 0 \end{aligned}$$

ומכאן נקבל כי $x=5$ או $x=8$

1.1.3 $2x^2+15x+28=0$

$$\begin{aligned} 2x^2+15x+28 &= 0 \\ 2x^2+8x+7x+28 &= 0 \\ 2x(x+4)+7(x+4) &= 0 \\ (2x+7)(x+4) &= 0 \\ 2(x+3.5)(x+4) &= 0 \end{aligned}$$

וקיבלנו כי $x=-4$ או $x=-3.5$

1.2 נוסחת השורשים

לא תמיד קל לפרק את המשוואה לטרינום כיוון שלא תמיד פשוט למצוא לאילו גורמים לפרק אותו. קיימת שיטה מעט ארוכה יותר אך בהרבה מקרים פשוטה יותר לפתרון משוואה ריבועית כל שהי מהצורה $ax^2+bx+c=0$. במקרה זה פתרונות המשוואה נתונים על ידי נוסחת השורשים :

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1.2.1 $x^2-x-1=0$

נשתמש בנוסחאת השורשים ונקבל:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

כלומר $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ או $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

1.2.2 $2x^2+9x+7=0$

נפתור את המשוואה בעזרת נוסחת השורשים.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} \\ x_{1,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{4} \\ x_{1,2} &= \frac{-9 \pm 5}{4} \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי $x = \frac{-9+5}{4} = -1$ או $x = \frac{-9-5}{4} = -3.5$

1.3 תרגילים כלליים

בחלק זה יובאו תרגילים המשלבים את השיטות שהוצגו ממקודם וברמות גבוהות יותר.

1.3.1 $\frac{10}{x} + 9 = x$

$$\begin{aligned} \frac{10}{x} + 9 &= x \\ 10 + 9x &= x^2 \\ -x^2 + 9x + 10 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1)}}{-2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{-2} \\ x_1 = -1 & \qquad x_2 = 10 \end{aligned}$$

1.3.2 $\frac{9}{x-3} = \frac{1}{x^2-9} + \frac{x}{x+3}$

$$\begin{aligned} \frac{9}{x-3} &= \frac{1}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} \\ 9(x+3) &= 1 + x(x-3) \\ 9x + 27 &= 1 + x^2 - 3x \\ x^2 - 12x - 26 &= 0 \\ (x-13)(x+1) &= 0 \\ x_1 = 13 & \qquad x_2 = -1 \end{aligned}$$

1.3.3 $\frac{x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{x}{2x+2} + \frac{1}{x+2}$

$$\frac{x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{x}{2x+2} + \frac{1}{x+2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+3}{(x+2)(x+1)} &= \frac{x}{2(x+1)}+\frac{1}{x+2} \\
2(x^2+3) &= x(x+2)+2(x+1) \\
2x^2+6 &= x^2+2x+2x+2 \\
x^2-4x+3 &= 0 \\
(x-1)(x-3) &= 0 \\
x_1=1 & \qquad x_2=3
\end{aligned}$$

א׳ הוכחת נוסחת השורשים

תהי $ax^2+bx+c=0$ משוואה ריבועית כלשהי נסמן ב-x_1 x_2 את הפתרונות של המשוואה (אם קיימים כאלה, ייתכן גם ששניהם שווים כלומר קיים פתרון יחיד). אלו

גם הפתרונות של המשוואה$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ וכיוון שאלו פתרונות המשוואה והמקדם של x^2 הוא אחד מתקיים $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2$ ומכאן נקבל כי:

$$x_1+x_2 = \frac{-b}{a} \tag{2}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \tag{3}$$

שתי משוואות אלו ידועות כנוסחאות וייטה ועליהן מתבססת ההוכחה.
נניח ללא הגבלת הכלליות כי $x_1 \le x_2$. מתקיים:

$$\begin{aligned}
\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2-4\frac{a}{c}\right]} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2) \\
&= x_1
\end{aligned}$$

באופן דומה נפתח את המקרה שבו מחסרים את השורש:

$$
\begin{aligned}
\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}} = \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2-4\frac{a}{c}\right]} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}(x_1-x_2) \\
&= x_2
\end{aligned}
$$

ובזאת הוכחנו שנוסחת השורשים אכן נכונה ונותנת את פתרונות המשואה.