

מבנה ההוכחה באינדוקציה-דוגמא

לפני שנביא דוגמאות נדגיש שטענה שניתן להוכיח באינדוקציה היא טענה שתלויה במספר טבעי כלשהו (סימון מקובל במקרה זה - n). לגבי הטענה עלינו להוכיח שהיא מתקיימת לכל מספר טבעי בכלל ולצורך זה יש לבצע את שלושת שלבי ההוכחה באינדוקציה:

- שלב א' בסיס האינדוקציה : בדיקת הנוסחה למקרה פרטי (או למקרים פרטיים), שבו רואים את נכונות הטענה עבורו (או עבורם).
- שלב ב' הנחת האינדוקציה : מניחים שעבור מספר טבעי כלשהו - למשל, $n = k$, הטענה נכונה ומנסחים את הטענה עבור אותו מספר.
- שלב ג' צעד האינדוקציה (שלב המעבר) : מנסחים את הטענה עבור המספר העוקב $n = k + 1$, ומוכיחים אותה. ניתן להיעזר בהנחה לצורך ההוכחה, וברוב המקרים היא הכרחית.

לאחר ביצוע כל שלושת השלבים, יש להוסיף את המסקנה ש-"על סמך משפט ההוכחה באינדוקציה הטענה נכונה לכל מספר טבעי". ניתן לסיים אותה בכל דרך שתמצאו (כמו מ.ש.ל או מש"ל, Q.E.D, שרטוט ריבוע קטן וכו'..).

דוגמא: אינדוקציה של טענה כללית

הוכיחו שהביטוי $2n^2 + 3n - 4$ חיובי לכל n טבעי.

הוכחה:

- שלב א' : בסיס האינדוקציה : בדיקה עבור $n = 1$ (אם בתרגיל עלינו להוכיח שהטענה מתקיימת החל ממספר מסויים p , מתחילים את הבדיקה עבור $n = p$).
מציבים במקום n בטענה את המספר עבורו בודקים, ולאחר ההצבה מקבלים :
 $2n^2 + 3n - 4 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$ שהוא מספר חיובי. כלומר, הטענה נכונה עבור המקרה הפרטי של $n = 1$.
- שלב ב' : הנחת האינדוקציה : אנו מניחים שעבור $n = k$, הביטוי $2k^2 + 3k - 4$ חיובי. על מה מתבססת ההנחה שלנו? - על השלב הקודם, בו הראינו שהטענה נכונה עבור n מסויים.
- שלב ג' : צעד האינדוקציה : עלינו להוכיח, שעבור $n = k + 1$ מתקיים :
 $2(k + 1)^2 + 3(k + 1) - 4 > 0$

נפתח סוגריים, נפשט את הביטוי ונקבל:

$$2(k^2 + 2k + 1) + 3(k + 1) - 4 = 2k^2 + 4k + 2 + 3k + 3 - 4 = 2k^2 + 7k + 1$$

כלומר, מספיק להוכיח שהביטוי $2k^2 + 7k + 1$ חיובי לכל k טבעי. על מנת להוכיח זאת ניעזר בהנחת האינדוקציה (כאן אפשר לפי שיקולים פשוטים לסיים, אבל במקרים אחרים זו תהיה הדרך היחידה לפתרון), ונפרק את הביטוי $2k^2 + 7k + 1$, כך שנקבל את הנחת האינדוקציה ועוד איבר (או איברים). ואז, כל שיוותר לנו הוא להוכיח עבור האיברים הנוספים. נקבל:

$$2k^2 + 7k + 1 = 2k^2 + 3k + 4k - 4 + 5 = 2k^2 + 3k - 4 + 4k + 5 > 0$$

הביטוי $2k^2 + 3k - 4$ על פי הנחת האינדוקציה הוא חיובי לכל k טבעי. והביטוי $4k + 5$ הוא חיובי לכל k טבעי כי הוא סכום של מספרים חיוביים. קיבלנו סכום של שני ביטויים חיוביים, שהוא תמיד חיובי

מסקנה: בדקנו נכונות הטענה ל- $n=1$, ומההנחה של נכונותה עבור $n=k$ טבעי מסוים הוכחנו את נכונותה עבור $n=k+1$, ולכן על פי משפט האינדוקציה השלמה הטענה נכונה לכל מספר טבעי.