סיכום נוסחאות בגיאומטריה אנליטית-שאלון 07

1 הנקודה

המרחק בין הנקודות (x_1,y_1) ו־(x_2,y_2) הוא: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2}$

אמצע הקטע שקצותיו (x_1,y_1) ו־(x_2,y_2) הוא בנקודה: $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

נקודה המחלקת את הקטע AB שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו־$B(x_2,y_2)$ ביחס של $l:k$ הוא:
$P\left(\frac{lx_1+kx_2}{l+k},\frac{ly_1+ky_2}{l+k}\right)$

שטח המשולש שקודקודיו הם (x_1,y_1), (x_2,y_2), ו־(x_3,y_3) הוא:
$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\right|$

2 הישר

משוואה כללית של ישר: $Ax+By+C=0$

משוואת ישר העובר דרך (x_1,y_1) ששיפועו m: $y-y_1=m(x-x_1)$

הזווית αשישר ששיפועו m יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־x: $m=\tan\alpha$

בהנתן שני ישרים $y=m_1x+n_1$ ו־$y=m_2x+n_2$ מתקיים:

1. הישרים נחתכים אם ורק אם $m_1\neq m_2$
2. הישרים מקבילים אם ורק אם $m_1=m_2$ וגם $n_1\neq n_2$
3. הישרים מתלכדים אם ורק אם $m_1=m_2$ וגם $n_1=n_2$

שיפוע הישר העובר בנקודות (x_1,y_1) ו־ (x_2,y_2): $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

משוואת הישר העובר דרך (x_1,y_1) ו־ (x_2,y_2): $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

הישרים $y=m_1x+n_1$ ו־$y=m_2x+n_2$ ניצבים אם ורק אם: $m_1\cdot m_2=-1$

הזווית (החדה) בין שניה הישרים $y=m_1x+n_1$ ו־$y=m_2x+n_2$ מקיימת: $\tan\alpha=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}\right|$

המרחק בין הישרים המקבילים $Ax+By+C_1=0$ ו־$Ax+By+C_2=0$: $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

המרחק בין הישרים המקבילים $y=mx+n_1$ ו־$y=mx+n_2$: $d=\frac{|n_2-n_1|}{\sqrt{m^2-1}}$

מרחק הישר $Ax+By+C=0$ מראשית הצירים: $d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

מרחק הישר $Ax+By+C=0$ מהנקודה (x_1,y_1): $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

מרחק הישר $y=mx+n$ מהנקודה (x_1,y_1): $d=\frac{|-mx_1+y_1-n|}{\sqrt{m^2+1}}$

משוואות חוצי הזויות של הישרים $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ נתונות ע"י
$\left|\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\right|=\left|\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right|$

3 המעגל

משוואת מעגל עם רדיוס R שמרכזו (a,b): $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

משוואת מעגל קנוני עם רדיוס R: $x^2+y^2=R^2$

משוואת המשיק למעגל הקנוני העובר דרך הנק' (x_1,y_1) הנמצאת על המעגל: $xx_1+yy_1=R^2$

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ העובר דרך הנק' (x_1,y_1) שעליו:

$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$

שיפוע משיקל למעגל שמרכזו (a,b) בנק' (x_1,y_1) שעליו: $m=\frac{x_1-a}{y_1-b}$

תנאי ההשקה של הישר $y=mx+n$ למעגל הקנוני: $n^2=R^2(m^2+1)$

תנאי ההשקה של הישר $y=mx+n$למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$:

$(-ma+b-n)^2=R^2(m^2+1)$

תנאי ההשקה של הישר $Ax+By+C=0$ למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$:

$\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R$

משוואת המשיקים למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ששיפועם m:

$y-b=m(x-a)\pm R\sqrt{m^2+1}$

משוואת המיתר המחבר את המשיקים למעגל הקנוני היוצאים מנק' (x_0,y_0): $xx_0+yy_o=R^2$

משוואת המיתר המחבר את המשיקים למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ היוצאים מנק' (x_0,y_0):

$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$

4 אליפסה

משוואת האליפסה הקנונית שמרכזה בראשית הצירים וציריה על הצירים: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

מוקדי האליפסה, $(c,0)$ ו־$(-c,0)$ מקיימים: $c^2=a^2-b^2$

מרחק הנקודה (x,y) שעל האליפסה מהמוקדים: $r_1=a-\frac{cx}{a}$**(ימני)**, $r_2=a+\frac{cx}{a}$**(שמאלי)**

משוואת המשיק לאליפסה בנקודה (x_1,y_1) שעליה: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

משוואת המיתר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים לאליפסה היוצאים מנק' (x_0,y_0):

$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

תנאי ההשקה של הישר $y=mx+n$ לאליפסה: $n^2=a^2m^2+b^2$

משוואת המשיק לאליפסה ששפועו m: $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

5 הפרבולה

משוואת הפרבולה הקנונית: $y^2 = 2px$
מוקד הפרבולה הוא בנקודה: $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
מדריך הפרבולה: $x = -\frac{p}{2}$
אורך רדיוס מנקודה (x, y) שעל הפרבולה למוקד ולמדריך: $r = x + \frac{p}{2}$
משוואת המשיק לפרבולה בנקודה (x_1, y_1)שעליה: $yy_1 = p(x + x_1)$
משוואת הנורמל לפרבולה בנק' (x_1, y_1) שעליה: $y_1x + py = y_1(p + x_1)$
משוואת המיתר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים לפרבולה היוצאים מהנקודה (x_0, y_0) שמחוצה לה: $yy_0 = p(x + x_0)$
תנאי ההשקה של ישר $y = mx + n$ לפרבולה: $n = \frac{p}{2m}$
משוואת הישר ששיפועו m המשיק לפרבולה: $y = mx + \frac{p}{2m}$

6 ההיפרבולה

משוואת ההיפרבולה הקנונית: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
מוקדי ההיפרבולה $(c, 0)$ ו־$(-c, 0)$ מקיימים: $c^2 = a^2 + b^2$
מרחק הנקודה (x, y) שעל ההיפרבולה מהמוקדים: $r_1 = \left|\frac{cx}{a} - a\right|$ (ימני) $r_2 = \left|\frac{cx}{a} + a\right|$ (שמאלי)
האסימפטוטות של ההיפורבולה הקנונית: $y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x$