שאלות נוספות בגיאומטריה אנליטית

שאלה 1

שאלה 1. נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=2ax$, $a>0$.
במעגל מעבירים מיתר AB העובר דרך ראשית הצירים.

מנקודה B ממשיכים את המיתר עד לנקודה P כך ש- AB=BP, ושיעור ה-x של P הוא חיובי.

א. (1) מצא את משוואת המקום הגיאומטרי שעליו נמצאות הנקודות P הנוצרות באופן שתואר (הבע באמצעות a).

פתרון: כדי להביא את משוואת המעגל לצורתה התקנית נוסיף לשני אגפיה $-2ax+a^2$.
נקבל $x^2-2ax+a^2+y^2=2ax+a^2-2ax$, ועל"י פישוט ושימוש בנוסחת הכפל המקוצר נקבל $(x-a)^2+y^2=a^2$.
נסמן ב-(x,y) את השיעורים של P. B היא אמצע הקטע AP, כאשר השיעורים של A הם (0,0), ושל P הם (x,y), ולכן הקוארודינטות של B הן $\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$. מכיוון שהנקודה B נמצאת על המעגל הנ"ל, השיעורים שלה מקיימים את משוואת המעגל, כלומר קיים $\left(\frac{x}{2}-a\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=a^2$. נכפול משוואה זאת ב-4 כדי להביאה לצורה תיקנית ונקבל $(x-2a)^2+y^2=(2a)^2$. זאת היא משוואה של המקום הגיאומטרי המבוקש, וזאת היא משוואת מעגל שמרכזו ב-(2a,0) ורדיוסו 2a.

(2) סרטט סקיצה של המקום הגיאומטרי שאת משוואתו מצאת.
ציין בסירטוט את נקודות החיתוך של המקום הגיאומטרי עם ציר ה-x (הבע באמצעות a במידת הצורך).

פתרון: לא מובא כאן הסירטוט, אבל ברור מה הוא צריך להיות.
הצבה של y=0 במשוואה נותנת $(x-2a)^2=(2a)^2$, ולכן $x-2a=\pm 2a$, ולכן $x=0,4a$, ונקודות החיתוך עם ציר ה-x הן (0,0) ו- (0,4a).
(ניתן גם להסיק תשובה זאת ישירות מכך שמרכז המעגל הוא ב-(0,2a) ורדיוסו 2a).

ב. מזיזים את המקום הגיאומטרי שסירטטת, כך שמרכזו נמצא בראשית הצירים.
כופלים ב- 2/3 את שיעור ה-y של כל אחת מהנקודות במקום הגיאומטרי בלי לשנות את שיעורי ה-x של הנקודות.
(1) מצא את משואת המקום הגיאומטרי של הנקודות שנוצרו באופן שתואר.

פתרון: ההזזה המבוקשת נותנת מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 2a, ולכן משוואה שלו היא $x^2+y^2=(2a)^2$.
נסמן ב-(x,y) את השיעורים של הנקודה שהתקבלה מנקודה על מעגל זה ע"י הכפלת שעור ה-y ב-2/3.
מכיוון ש-y הוא 2/3 של שיעור ה-y של הנקודה ממנה היא התקבלה. שיעור ה-y של הנקודה המקורית הוא $\frac{3}{2}y$. והנקודה המקורית היא $\left(x,\frac{3}{2}y\right)$. הנקודה המקורית ממלאת אחר משוואת המעגל הנ"ל ולכן קיים

$(2a)^2 = x^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2$. נחלק את שני האגפים ב- $(2a)^2$, ונקבל $\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{4}{3}a}\right)^2 = 1$, וזאת היא המשוואה הקנונית של אליפסה שאורך חצאי ציריה הוא 2a ו- $\frac{4}{3}a$.

שאלה 2

שאלה 2. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-16} = 1$, $a \neq 4$, a>0.

א. עבור אילו ערכים של a מייצגת המשוואה (1) אליפסה? (2) מעגל?

פתרון: נעביר את המשוואה לצורה של המשוואה הקנונית של האליפסה והמעגל ונכתוב אותה כ- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16-a^2}=1$. זאת היא משוואה של אליפסה או מעגל רק אשר $16-a^2$ הוא ריבוע של מספר חיובי, כלומר כאשר הוא חיובי. (אם $16-a^2$ הוא שלילי זאת היא היפרבולה, והוא אינו יכול להיות 0 כי a חיובי ואינו 4).לכן מה שמתקבל זאת אליפסה או מעגל כאשר $a^2<16$, כלומר כאשר 0<a<4. העקום המתקבל הוא מעגל כאשר שני ציריו שווים, כלומר כאשר $a^2=16-a^2$, וזה שקול ל- $a^2=8$, ועבור a חיובי זה שקול ל- $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

ב. ידוע כי המשוואה הנתונה מייצגת אליפסה. באליפסה חסומים: עיגול הנוגע באליפסה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-y, וריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים (ראה ציור). היחס בין שטח העיגול החסום לבין שטח הריבוע החסום הוא $\frac{4\pi}{9}$. מצא את הערך של a^2.

הערה: פתרון סעיף ב אינו תלוי בפתרון סעיף א.

פתרון: מכיוון שציר ה-y הוא ציר סימטריה של האליפסה צלע של הריבוע המקבילה לציר ה-x חותכת את האליפסה בשתי נקודות הנמצאות בשני הצדדים של ציר ה-y ומרחקיהן מציר ה-y שווים. נסמן מרחקים אלו ב-u. לכן משוואות צלעות הריבוע המקבילות לציר ה-y הן x=-u ו- x=u.ואורך הצלעות האופקיות של הריבוע הוא 2u. בדיוק באותו אופן, מכיוון שגם ציר ה-x הוא ציר סימטריה של האליפסה, אנו מקבלים שמשוואות צלעות הריבוע המקבילות לציר ה-x הן y=-v ו- y=v עבור מספר v מתאים, ואורך הצלעות האנכיות של הריבוע הוא 2v. מכיוון שכל צלעות הריבוע שוות אורך קיים v=u, ושטח הריבוע הוא $4u^2$. אחד מקודקודי הריבוע נמצא על הישרים x=u ו-y=u ולכן שיעוריו הם (u,u). שיעורים אלו מקיימים את משוואת האליפסה כלומר $\frac{u^2}{a^2}+\frac{u^2}{16-a^2}=1$ הכפלת שיוויון זה במכנים נותנת $u^2((16-a^2)+a^2)=a^2(16-a^2)$, כלומר $16u^2=16a^2-a^4$, ולכן שטח הריבוע הוא $4u^2=4a^2-\frac{1}{4}a^4$.

נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה-y מתקבלות בהצבת x=0 במשוואת האליפסה ולכן הן $\left(0,\pm\sqrt{16-a^2}\right)$, רדיוס המעגל הוא $\sqrt{16-a^2}$, ריבועו הוא $16-a^2$ ושטח העיגול הוא $\pi\left(16-a^2\right)$.

מכיוון ששטח זה שווה לשטח הריבוע כפול $\frac{4\pi}{9}$ קיים השיוויון

$$\pi\left(16-a^2\right)=\frac{4\pi}{9}\frac{a^2\left(16-a^2\right)}{4}=\frac{\pi}{9}a^2\left(16-a^2\right)$$

מכיוון ש- a אינו 4 אפשר לצמצם את השיוויון ב- $\pi\left(16-a^2\right)$ ומתקבל $1=\frac{1}{9}a^2$, כלומר $a^2=9$.