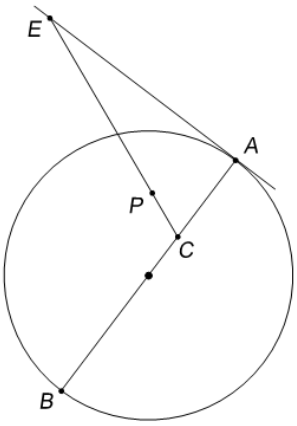
עוד שתי שאלות בגיאומטריה אנליטית

שאלה 1



נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 887$.

בנקודה $A(20,21)$ שעל המעגל העבירו משיק למעגל.

נקודה C נמצאת על קוטר המעגל AB

כך ש־ $AC = \frac{1}{3} AB$.

נקודה E נמצאת על המשיק,

ונקודה P נמצאת על הקטע EC כך ש־ $CE = 5\ CP$.

א. מצא את שיעורי הנקודה C .

ב. הבע את השיעורים של הנקודה E באמצעות השיעורים של הנקודה P ,

ומצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P הנוצרות באופן זה.

פתרון

1. א.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 887 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 887 + 4 + 9$$

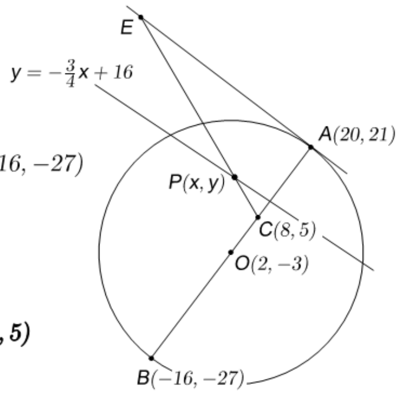
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 900 \quad \Rightarrow \quad O(2,-3)$$

$$\frac{x_B + x_A}{2} = x_O \quad \Rightarrow \quad \frac{x_B + 20}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_B = -16$$

$$\frac{y_B + y_A}{2} = y_O \quad \Rightarrow \quad \frac{y_B + 21}{2} = -3 \quad \Rightarrow \quad y_B = -27 \quad \Rightarrow \quad B(-16,-27)$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{20 + \frac{1}{2}\cdot(-16)}{1 + \frac{1}{2}} = 8$$

$$y_C = \frac{21 + \frac{1}{2}\cdot(-27)}{1 + \frac{1}{2}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C(8,5)}$$



ב.

$$P(x,y)\ ,\ \frac{CE}{CP} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{EP}{PC} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_E + 4\cdot 8}{1+4} \quad \Rightarrow \quad x_E = 5x - 32$$

$$y = \frac{y_E + 4\cdot 5}{1+4} \quad \Rightarrow \quad y_E = 5y - 20 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E(5x-32\ ,\ 5y-20)}$$

$$m_{AC} = \frac{21-5}{20-8} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}\ ,\quad EA \perp AC \quad \Rightarrow \quad m_{EA} = -\frac{3}{4}$$

$$m_{EA} = \frac{5y-20-21}{5x-32-20} = \frac{5y-41}{5x-52} = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 5y - 41 = -\frac{15}{4}x + 39$$

$$\Rightarrow \quad 5y = -\frac{15}{4}x + 80 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x + 16}$$

שאלה 2

א. נתון ישר שמשוואתו $3y = 4x + 20$.

היישר מאונך לאחת האסימפטוטות של היפרבולה, ועובר דרך המוקד <u>השמאלי</u> של ההיפרבולה.

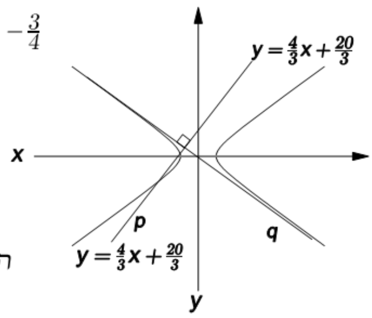
מצא את משוואת ההיפרבולה.

ב. מצא את השיעורים של הנקודות על ההיפרבולה המקיימות:

מרחק כל נקודה מאחד המוקדים של ההיפרבולה גדול פי 2 מהמרחק מהמוקד האחר.

פתרון

2. א. נסמן את הישר הנתון: p ואת האסימפטוטה שבשאלה ב־ q.



$3y = 4x + 20 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \;\; , \;\; m_p = \frac{4}{3} \;,\; p \perp q \quad \Rightarrow \quad m_q = -\frac{3}{4}$

משוואות האסימפטוטות להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ הם $y = \pm\frac{b}{a}x$

$\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3a}{4}$

המוקד השמאלי $(-c, 0)$ נמצא על הישר p לכן:

$3 \cdot 0 = 4 \cdot (-c) + 20 \quad \Rightarrow \quad \underline{c = 5}$

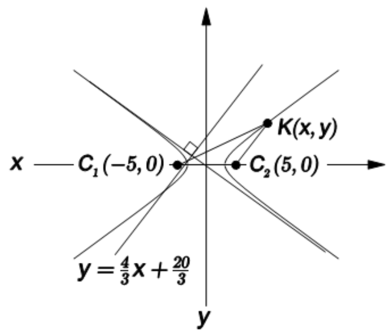
$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + (\frac{3a}{4})^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad 16a^2 + 9a^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad 25a^2 = 400$

$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$

ב.

תהי $K(x, y)$ נקודה על ההיפרבולה המקיימת את תנאי השאלה: $KC_1 = 2\,KC_2$

$KC_1 - KC_2 = 2a = 8 \quad \Rightarrow \quad 2\,KC_2 - KC_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad KC_2 = 8$



$KC_2 = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 + y^2 = 64$

$\Rightarrow \quad (*) \;\; y^2 = 64 - (x-5)^2$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{64-(x-5)^2}{9} = 1 \;\; / \cdot 144$

$9x^2 - 16(64 - x^2 + 10x - 25) = 144$

$9x^2 - 1024 + 16x^2 - 160x + 400 = 144$

$$25x^2 - 160x - 768 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{160 \pm 320}{50} = \frac{16 \pm 32}{5} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 9.6 \ (\surd) \ , \ x_2 = -3.2 \ (\times)$$

ההיפרבולה אינה מוגדרת עבור $x = -3.2$ (מוגדרת עבור: $(x \le -4) \cup (x \ge 4)$).

$$(*) \ y^2 = 64 - (x-5)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 64 - (9.6-5)^2 = 42.84 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 6.54$$

משיקולי סימטריה, הנקודה K יכולה להימצא בכל אחד מרביעי המישור, ומכאן:

$$\underset{I}{\boldsymbol{K_1(9.6, 6.54)}} \ , \ \underset{II}{\boldsymbol{K_2(-9.6, 6.54)}} \ , \ \underset{III}{\boldsymbol{K_3(-9.6, -6.54)}} \ , \ \underset{Iv}{\boldsymbol{K_4(9.6, -6.54)}}$$