

תרגול נוסף בגיאומטריה אנליטית

שאלה 1

- הנקודה $(4, 1)$ נמצאת על ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
 המרחק בין מוקדי ההיפרבולה הוא $2\sqrt{15}$ יחידות אורך.
 מחברים כל נקודה שעל ההיפרבולה עם ראשית הצירים.
- א.** מצא את משוואת המקום הגאומטרי של אמצעי הקטעים שנוצרים באופן זה.
- ב.** מהו תחום ההגדרה של משוואת המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א'?
- ג.** הנקודה $P(5, \sqrt{5.5})$ נמצאת על המקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף א',
 ו- B היא נקודה על ההיפרבולה. O היא ראשית הצירים. נסמן את שיפוע הקטע PO ב- m .
 נתון כי שיפוע הקטע BO הוא $-m$.
 מצא את שיעורי הנקודה B . מצא את שתי האפשרויות.

פתרון

1. א. סימון: הנקודה הנתונה $A(4, 1)$, נקודה כלשהי על ההיפרבולה - Q , הנקודה המבוקשת - $T(x, y)$

$$F_2 F_1 = 2\sqrt{15} \Rightarrow F_{1,2}(\pm\sqrt{15}, 0) \Rightarrow c = \sqrt{15}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 = 15 \Rightarrow b^2 = 15 - a^2$$

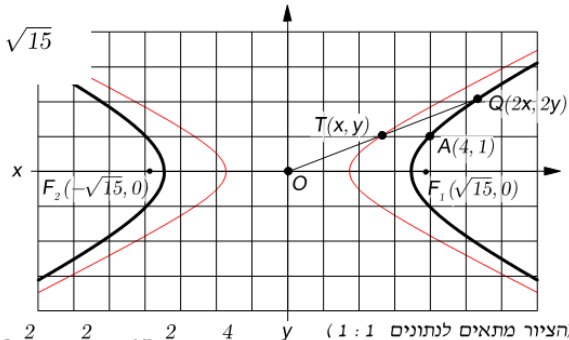
$$A(4, 1) \in \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\frac{16}{a^2} - \frac{1}{15 - a^2} = 1 \quad / \cdot a^2 (15 - a^2)$$

$$16(15 - a^2) - a^2 = a^2(15 - a^2) \Rightarrow 240 - 16a^2 - a^2 = 15a^2 - a^4 \quad (הצירור מתאים לנתונים 1:1)$$

$$a^4 - 32a^2 + 240 = 0 \Rightarrow (a^2)_{1,2} = \frac{32 \pm 8}{2} = 16 \pm 4 \Rightarrow (a^2)_1 = 20, (a^2)_2 = 12$$

$$b^2 = 15 - a^2 \Rightarrow (b^2)_1 = 15 - 20 = -4 \quad (\times), \quad (b^2)_2 = 15 - 12 = 3 \quad (\checkmark)$$



$$\Rightarrow a^2 = 12, b^2 = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ משוואת ההיפרבולה הנתונה}$$

$$TO = TQ, O(0,0), T(x,y) \Rightarrow \frac{x_Q+0}{2} = x_T = x \Rightarrow x_Q = 2x$$

$$\frac{y_Q+0}{2} = y_T = y \Rightarrow y_Q = 2y \Rightarrow Q(2x, 2y)$$

$$Q(2x, 2y) \in \left\{ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1 \right\} \Rightarrow \frac{4x^2}{12} - \frac{4y^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{4y^2}{3} = 1 \Rightarrow x^2 - 4y^2 = 3$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \text{ או (הצגה שקולה), ההיפרבולה:}$$

ב. חיתוך היפרבולה עם ציר x הוא בנקודות $(\pm a, 0)$, אותו פרמטר a שבמשוואת ההיפרבולה. המקום הגאומטרי שקיבלנו (בהצגה השניה בסעיף א') הוא היפרבולה שבה: $a^2 = 3$.

$$\text{ומכאן (ראה ציור לעיל) תחום ההגדרה: } (x \leq -\sqrt{3}) \cup (x \geq \sqrt{3})$$

ג. m משמש אותנו לציון שיפוע. כדי שלא נטעה עם ה־ m הנתון בשאלה - נסמן שיפוע כ־ ship.

$$P(5, \sqrt{5.5}), O(0,0), \text{ ship}_{PO} = m \Rightarrow m = \frac{\sqrt{5.5}-0}{5-0} = \frac{\sqrt{5.5}}{5}$$

$$B(r, s) \Rightarrow \text{ship}_{BO} = \frac{s}{r} = -m = -\frac{\sqrt{5.5}}{5} \Rightarrow \frac{s^2}{r^2} = \frac{5.5}{25} = \frac{11}{50} \Rightarrow s^2 = \frac{11r^2}{50}$$

$$B(r, s) \in \left\{ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1 \right\} \Rightarrow \frac{r^2}{12} - \frac{s^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{r^2}{12} - \frac{11r^2}{50 \cdot 3} = 1 \quad / \cdot 300$$

$$25r^2 - 22r^2 = 300 \Rightarrow 3r^2 = 300 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 10$$

$$\frac{s}{r} = -\frac{\sqrt{5.5}}{5} \Rightarrow s = -\frac{\sqrt{5.5}}{5}r, r_1 = 10 \Rightarrow s_1 = -2\sqrt{5.5} \Rightarrow B_1(10, -2\sqrt{5.5})$$

$$r_2 = -10 \Rightarrow s_2 = 2\sqrt{5.5} \Rightarrow B_2(-10, 2\sqrt{5.5})$$