

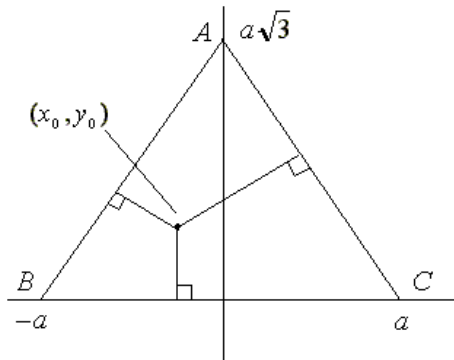
שאלה בגיאומטריה אנליטית

שאלה

שניים מקדקודיו של משולש שווה צלעות ABC הם $B(-a, 0)$ ו- $C(0, a)$ (כאשר $a > 0$). הראו כי סכום המרחקים משלוש צלעות המשולש, של נקודה כלשהי בתוך המשולש, תלוי ב- a בלבד.

פתרון

כיוון שבסיס המשולש מונח על ציר ה- x באופן סימטרי יחסית לציר ה- y , הרי שקדקודו השלישי של המשולש, A , נמצא על ציר ה- y . נמצא על ציר ה- y . בעזרת משפט פיתגורס נמצא כי שיעור ה- y של A הוא $a\sqrt{3}$ או $-a\sqrt{3}$. נניח, ללא הגבלת הכלליות, כי קדקוד זה הוא $A(a\sqrt{3}, 0)$ (המקרה השני הוא סימטרי ונפתר באותו אופן בדיוק).



נחשב תחילה את משוואות הצלעות AB ו- AC .

חישוב משוואת הצלע AB :

$$m_{AB} = \frac{a\sqrt{3} - 0}{0 - (-a)} = \sqrt{3}$$

ולפי הנוסחה למשוואת ישר על פי שיפועו ונקודה דרכה הוא עובר:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \sqrt{3}(x - (-a))$$

$$y = \sqrt{3}x + a\sqrt{3}$$

$$AB: \sqrt{3}x - y + a\sqrt{3} = 0$$

באופן דומה נחשב את משוואת AC :

$$m_{AC} = \frac{a\sqrt{3}-0}{0-a} = -\sqrt{3}$$

$$y-0 = -\sqrt{3}(x-a)$$

$$y = -\sqrt{3}x + a\sqrt{3}$$

$$AC: \sqrt{3}x + y - a\sqrt{3} = 0$$

נבחר נקודה כלשהי (x_0, y_0) בתוך המשולש, ונחשב את מרחקיה משלוש צלעות המשולש.

כידוע, מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

כאשר הסימן נקבע כך שהמרחק יהיה חיובי.

לכן מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהצלע AB הוא:

$$d = \frac{\sqrt{3}x_0 - y_0 + a\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}x_0 - y_0 + a\sqrt{3}}{2}$$

ומרחק הנקודה (x_0, y_0) מהצלע AC הוא:

$$d = \frac{\sqrt{3}x_0 - y_0 + a\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}x_0 - y_0 + a\sqrt{3}}{2}$$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהצלע BC הוא כמובן y_0 .

כעת נחבר את שלושת המרחקים ונראה כי סכומם תלוי ב- a בלבד:

$$\frac{\sqrt{3}x_0 - y_0 + a\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}x_0 + y_0 - a\sqrt{3}}{2} + y_0 =$$

$$\frac{\sqrt{3}x_0 - y_0 + a\sqrt{3} - \sqrt{3}x_0 - y_0 + a\sqrt{3}}{2} + y_0 =$$

$$= \frac{2a\sqrt{3} - 2y_0}{2} + y_0 =$$

$$= a\sqrt{3} - y_0 + y_0 = a\sqrt{3}$$