

פילוסופיה של המתמטיקה - המשך

לוגיציזם

הלוגיציזם טוען כי הלוגיקה היא הבסיס של המתמטיקה, וכי כל האמירות המתמטיות הן אמיתות לוגיות מוכרחות. לדוגמה, הטענה "אם סוקרטס הוא אדם, וכל אדם הוא בן תמותה, אז סוקרטס הוא בן תמותה", היא אמת לוגית מוכרחת. ללוגיציסט, כל האמירות המתמטיות הן מאותו סוג; הן תשובות אנליטיות, או טאוטולוגיות.

גוטלוב פרגה היה מייסד הלוגיציזם. בספרו החשוב, "החוקים הבסיסיים של האריתמטיקה", הוא בנה את האריתמטיקה ממערכת לוגית, שכללה את מה שהוא כינה 'החוק הבסיסי החמישי' (שני מושגים F ו- G הם שווי משמעות, אם ורק אם כל אובייקט a המתאים ל- F מתאים גם ל- G), עיקרון שהוא חשב שהוא חלק מקובל של הלוגיקה.

אך בבנייה של פרגה הייתה טעות פטאלית. ברטרנד ראסל גילה כי החוק הבסיסי החמישי אינו עקבי (זהו הפרדוקס של ראסל). פרגה נטש את תוכניתו הלוגית זמן קצר לאחר מכן, אך ראסל ווייטהד המשיכו אותה. הם ייחסו את הפרדוקס ל"מעגליות מרושעת" ובנו תיאוריה מסובכת של מדרג על מנת לפתור את בעיית המעגליות. במערכת זו הם הצליחו, בסופו של דבר, לבנות הרבה מהמתמטיקה המודרנית אך באופן שונה ומסובך יותר (לדוגמה, המספרים היו שונים בכל רמה של המדרג, והיו אינסוף רמות במדרג). הם גם היו צריכים להתפשר בכמה נקודות על מנת לבנות כל כך הרבה מהמתמטיקה, כגון ב"אקסיומת הצמצום". אפילו ראסל אמר כי האקסיומה הזו לא באמת שייכת ללוגיקה.

לוגיקנים מודרניים שבו לתוכנית הקרובה יותר לזו של פרגה. הם נטשו את החוק הבסיסי החמישי לטובת עקרונות הפשטה כגון העיקרון של יום (שמספר הדברים שמתאימים ל- F שווה למספר הדברים שמתאימים ל- G), אם ורק אם קיימת התאמה חד-חד ערכית בין הקבוצות המתארות את F ו- G). פרגה היה זקוק לחוק הבסיסי החמישי כדי לתת הגדרה ברורה של המספרים, אך אפשר להפיק את כל המאפיינים של המספרים מהעיקרון של יום. דבר זה לא היה מספיק בשביל פרגה כי (בפרפרזה על דבריו) אין זה מוציא מכלל אפשרות כי יוליוס קיסר=2.

קונסטרוקטיביזם ואינטואיציוניזם

אינטואיציוניזם היא עמדה שבאה בעקבות טענתו של קאנט, בדבר האפשרות להגיע אל ההכרה הממשית של טבע העולם באמצעות התבונה בלבד, ולפיה כל הידע המתמטי נובע מהחשיבה האנושית. כל עצם מתמטי הוא תוצר של השכל, ולכן קיומו מותנה ביכולת לבנות אותו. בהתאם לכך, יש לקבל לדיון המתמטי רק עצם שקיימת דרך ברורה לבנותו.

ציטוט טיפוסי הוא של לאופולד קרונקר: "אלוהים ברא את המספרים הטבעיים, כל השאר הוא עבודת האדם". כוח משמעותי מאחורי האינטואיציוניזם הוא ל. אי. ג'יי. ברואר, שהציע לוגיקה חדשה, השונה מהלוגיקה האריסטוטלית הקלאסית; ה"לוגיקה האינטואיציונית" אינה כוללת את כלל השלישי מן הנמנע (החוק שאומר שדבר חייב להיות אמת או שקר, ושאין אופציה אחרת), ולפיכך היא אינה מסכימה עם הוכחה בדרך השלילה.

אקסיומת הבחירה נדחית אף היא. עבודה חשובה נעשתה לאחר מכן על ידי ארנד הייטינג (אנ'), שהיה תלמידו של ברואר, שניסח באופן פורמאלי את הלוגיקה האינטואיציוניסטית, ועל ידי ארט בישופ, שהצליח להוכיח כמה מהמשפטים החשובים ביותר באנליזה במסגרת הזו.

באינטואיציוניזם, המושג "בנייה ברורה" לא הוגדר באופן חותך, ודבר זה הביא לביקורת עליה. ניסיונות נעשו להשתמש במושגים כגון מכונת טיורינג או פונקציה רקורסיבית על מנת למלא את החסר, דבר שהוביל לטענה כי רק שאלות שמתייחסות להתנהגות של אלגוריתמים סופיים משמעותיות, וכי רק אותם המתמטיקה צריכה לחקור.

תיאוריות השכל המוגשם

תיאוריות אלה טוענות כי החשיבה המתמטית היא פיתוח טבעי של המערכת הקוגניטיבית האנושית לנוכח היקום הפיזי. לדוגמה, המושג המופשט של מספר מגיע מהחווייה של ספירת חפצים נפרדים. כלומר, המתמטיקה אינה אוניברסאלית ולא קיימת בצורה אמיתית, חוץ מאשר במוח האנושי. בני אדם בונים, אך אינם מגלים, את המתמטיקה.

לפי זה, היקום הפיזי הוא הבסיס האולטימטיבי של המתמטיקה: הוא שהדריך את האבולוציה של המוח ולאחר מכן קבע איזה שאלות המוח הזה יבקש לחקור. אולם, למוח האנושי אין תביעה מיוחדת על "האמת" או על הגישות אליה שנבנות על המתמטיקה; אם בניות אלה כגון זהות אוילר הן "אמת", אז הן אמת כמפה של החשיבה והמוח האנושי, ולא כמפה של דבר שהמוח הזה "רואה".

היעילות של המתמטיקה בהסבר היקום מוסברת בקלות: המוח הוא שבנה את המתמטיקה כדי שיהיה יעיל ביקום הזה.

כנגד טענה זאת מועלת התנגדות הקשורה באינסוף: המתמטיקה מטפלת בהרבה דברים אינסופיים - הן מבחינת סוגים, הן מבחינת כמות והן מבחינת תהליכים, כיצד המתמטיקה, שכוללת עצם או אידיאה כמו האינסוף, יכולה להימצא במוח האנושי, שהוא דבר סופי?

קונסטרוקטיביות חברתית או ריאליזם חברתי

תיאוריה זו רואה את המתמטיקה בעיקר כבנייה חברתית, כתוצר של התרבות, שניתן לשינוי ולתיקון. כמו במדעים האחרים, המתמטיקה היא הסכמה בין אנשים, וניתן לשנות אותה אם היא אינה עונה על צרכי הקבוצה. הכיוון של המחקר המתמטי נקבע בידי ההשקפות של הקבוצה החברתית שעוסקת בו, תכונותיה (למשל, האם היא חברה חשדנית או בוטחת באנשים), המבנה החברתי שלה, או על ידי הצרכים של החברה שתומכת בו. כוחות חיצוניים יכולים לשנות את הכיוון של חלק מהמחקר המתמטי, וישנן גם הגבלות פנימיות חזקות (המסורות, השיטות, הבעיות, המשמעויות והערכים המתמטיים שאליהם המתמטיקאים מחונכים). קונסטרוקטיביסטים מרבים לעסוק במושג ההוכחה, במיוחד בפער הרב הקיים בין ההגדרה הפורמאלית של הוכחה בלוגיקה מתמטית לבין הוכחות כפי שהן מופיעות הלכה למעשה בכתבי עת וספרים מתמטיים. הם מייחסים את ההבדלים בין קהילות שונות של מתמטיקאים בסטנדרטים של מה שנחשב להוכחה קבילה, שאותם הם מייחסים לנורמות חברתיות שונות.

רעיון זה סותר את האמונות המקובלות ביחס לאופן פעולתם של המתמטיקאים, הטוענות לטוהר ואובייקטיביות המתמטיקה. אך קונסטרוקטיביסטים מתמטיים טוענים כי המתמטיקה למעשה מבוססת על הרבה חוסר ודאות: עם האבולוציה של המתמטיקה, הסטאטוס של המתמטיקה הקודמת נעשה פחות ברור, והיא מתוקנת על ידי הקהילה המתמטית, במידה שאפשר או רצוי לשנותה. אפשר לראות את ההיבט הזה בהתפתחות של האנליזה על ידי הבחינה מחדש של הקלוקלוס על ידי לייבניץ וניוטון. הם גם אומרים כי ישנה אמונה רבה מדי בהוכחות אקסיומטיות ובביקורת עמיתים הדדית.

את טבעה החברתי של המתמטיקה אפשר לראות בתתי-התרבות שלה. אפשר לעשות גילויים חשובים בענף אחד של המתמטיקה שיהיו רלוונטיים לענפים אחרים, אך בדרך כלל לא מגלים את הקישורים האלה בגלל חוסר הקשר החברתי בין המתמטיקאים. כל תת-תחום יוצר לעצמו קהילה נפרדת, ולעתים יש קושי רב בתקשורת ביניהן, או במחקר העוסק בקשרים שעשויים לחבר את התחומים השונים של המתמטיקה. קונסטרוקטיביים חברתיים רואים את התהליך של המחקר המתמטי כיוצר את המשמעות, ואילו ריאליסטים חברתיים רואים חסרון ביכולת האנושית לפשט דברים, בהטיות קוגניטיביות אנושיות כמונעים את ההבנה של היקום "האמיתי" של "הדברים המתמטיים". קונסטרוקטיביסטים חברתיים לפעמים דוחים את החיפוש אחר יסודות המתמטיקה ככישלון ודאי, כחסר משמעות או כחסר טעם. יש הטוענים כי המתמטיקה אינה אמיתית או אובייקטיבית כלל, אלא היא מושפעת על ידי גזענות ואתנוצנטריזם. כמה מהרעיונות האלה קשורים לפוסטמודרניזם.

תרומות לאסכולה הזו נעשו על ידי אימרה לקטוש, שבעקבות קרל פופר טען שהידע המתמטי מתפתח בתהליך של השערות והפרכות, ותומאס טימושצקו. פול ארנסט ניסח במפורש פילוסופיה חברתית קונסטרוקטיביסטית, ורובין הרש פיתח תפישה דומה שאותה הוא מכנה הומניזם.

מעבר ל"אסכולות"

במקום להתמקד בוויכוחים הצרים על ה"אמת האמיתית" של המתמטיקה, או אפילו על הדברים המאפיינים את המתמטיקה כמו הוכחה, תנועה גדלה משנות ה-60 ועד שנות ה-90 החלה לאתגר את שאלת "היסודות", ואת האפשרות למצוא תשובה נכונה לשאלה מדוע המתמטיקה פועלת. ההתחלה של התנועה הייתה במאמר מפורסם של יוג'ין ויגנר מ-1960, "היעילות הלא-סבירה של המתמטיקה במדעי הטבע", שבו טען כי העובדה שהמתמטיקה ומדעי הטבע כה מתאימים זה לזה לא יכולה להיות מקרית, אך קשה להסביר אותה.

האסכולות ה"קוגניטיביות" או "החברתיות" הן תשובות לאתגר הזה. אך היו גם ויכוחים נוספים שקמו:

מעין-אמפיריציזם

עניין מקביל אחד, שאינו ממש מפריע לאסכולות באופן ישיר, אך הוא עדיין מאתגר את ההתמקדות שלהם, הוא הרעיון של המעין-אמפיריציזם במתמטיקה. רעיון זה גדל בסוף המאה ה-20 מהטענה הפופולארית שלא ניתן להוכיח כי אף אחד מיסודות המתמטיקה אכן

קיים. יש שקוראים לזה "פוסטמודרניזם מתמטי". גישה זו היא צורה מינימאלית של ריאליזם/קונסטרוקטיביזם חברתי, שמקבל שיטות אמפיריציסטיות-למחצה, ואף אמפיריציסטיות ממש, לתחום המתמטי המודרני.

שיטות כאלה תמיד היו חלק מהמתמטיקה העממית, ועל ידיה נעשו פעולות מרשימות של חישוב ומדידה. למעשה, השיטות האלה הם ה"הוכחה" היחידה שיש לתרבות כזו.

הילארי פטנאם טען, כי כל תיאוריה של ריאליזם מתמטי תכלול שיטות מעין-אמפיריציסטיות. הוא הציע כי יצורים מעולם אחר שעוסקים במתמטיקה, עשויים בהחלט להעדיף שיטות אמפיריציסטיות, ולזנוח את ההוכחות האקסיומטיות והקשוחות – אם כי יש סיכוי גדול יותר שהם יטעו בחישוביהם.

פעולה ומעשה

חוקרים רבים שאינם עוסקים בהוכחת משפטים מתמטיים העירו כמה הערות מעניינות ביחס לטבעה של המתמטיקה:

יהודה פרל טען, כי כל המתמטיקה כפי שהיא כיום מבוססת על **אלגברה של ראייה** – והציע אלגברה של מעשה (סיבתיות) על מנת להשלים אותה – דבר זה הוא התעניינות מרכזית של הפילוסופיה של הפעולה ושל מחקרים אחרים של היחס בין "ידיעה" ל"מעשה". התוצר החשוב ביותר של זה היו תיאוריות אמת חדשות, בעיקר אלה שקשורים לאקטיביזם ולביסוס שיטות אמפיריות.

איחוד

הרעיון של פילוסופיה של המתמטיקה בנפרד מהפילוסופיה הכללית ספג ביקורת כ"מביא מתמטיקאים טובים לפילוסופיה גרועה" – פילוסופים מעטים מסוגלים להבין את השפה והתרבות המתמטית באופן כזה שיוכלו לקשר בין המושגים הרגילים יותר של המטאפיזיקה לרעיונות המטאפיזיים המיוחדים יותר של האסכולות דלקמן. דבר זה יכול להוביל לחוסר קשר, שבו המתמטיקאים ממשיכים לעסוק בפילוסופיה גרועה וחסרת בסיס כהצדקה לאמונה בראיית עולם שמאפשרת להם לעבוד בתחומם.

אם כי תיאוריות חברתיות ומעין-אמפיריציזם, ובמיוחד תיאוריית המוח המוגשם, התמקדו יותר באפיסטמולוגיה שמונחית על ידי הנוהגים המתמטיים הקיימים, הם אינם מצליחים לקשר בין התחומים האלה לבין החישה והידע היומיומי.

אתיקה

כמו כן, יש אך מעט התייחסות לאתיקה של המחקר המתמטי. בתרבות טכנולוגית, המתמטיקה נתפסת כצורך מוחלט שערכה ברור מאליו – אף אם לענפים מסוימים אין מטרה ברורה, או שהם מועילים רק על מנת לאפשר מאבקים, כמו קריפטוגרפיה, סטגנוגרפיה, שמועילים לשמירת סודות, או המתמטיקה שקשורה לשיפור הביקוע הגרעיני. בעוד שהרוב מסכימים כי יש לפיזיקאים אחריות על המעשים האלה, מעטים מייחסים אחריות כלשהי למתמטיקאים.

הסוציולוגיה של הידע עסקה בחלק מהביקורת הזו, אך המתמטיקה עצמה הצליחה להתחמק מהמבטים הבוחנים שהם מנת חלקם של מדעים כמו הגנטיקה, הפיזיקה, הכלכלה או הרפואה.

פסיכולוגיה אבולוציונית לדוגמה אימצה את הרעיון ש"המוח הוא מחשב", במשמעות של "מכונת טיורינג". מהן המשמעויות של שימוש בהפשטה שאמורה הייתה להסביר מחשבים, להסבר המוח האנושי?

אסתטיקה

טענה נוספת היא שאפשר לראות את המתמטיקה באופן צר כמדע המדידה, עם כמות גדולה של קיצורי דרך שנועדו לפשט את החישובים. כמה מהאסכולות ייחסו למתמטיקה יותר חשיבות מאשר המטרה התועלתנית הזו – ולפעמים אף חיפשו הדרכה מוסרית, או אסתטיקה של האמת והיופי, בהפשטות של המתמטיקה. יש שרואים זאת כסימפטום של מדענות. רעיונות אלה מציעים כי המתמטיקה "עובדת" לא רק בתחום הצר של הפיזיקה, אלא גם בתחומים החברתיים והביולוגיים.

שפה

לבסוף, אף כי מתמטיקאים או פילוסופים רבים יקבלו את האמירה "מתמטיקה כשפה", אין הרבה תשומת לב שמופנית למשמעות של האמירה הזו. לא משתמשים בבלשנות כלפי מערכות הסמלים של המתמטיקה, כלומר, חוקרים את המתמטיקה באופן שונה מאשר שפות אחרות. היכולת לקלוט את המתמטיקה ולפעול בה נתפסת כנפרדת מאוריינות וקליטת שפה.

יש שטוענים כי דבר זה הוא תוצאה של כישלון לא של הפילוסופיה של המתמטיקה, אלא של הבלשנות ושל מחקר התחביר הטבעי. תחומים אלה, הם אומרים, אינם קשיחים מספיק, והבלשנות צריכה "לסגור את הפער". אך דבר זה נסמך במרומוז על הרעיון שהמתמטיקה היא עילאית מכל שאר סוגי הידע. הסטנדרטים של הקשיחות אולי שונים בשפות שונות, אך "יותר" הוא לאו דווקא "טוב יותר".