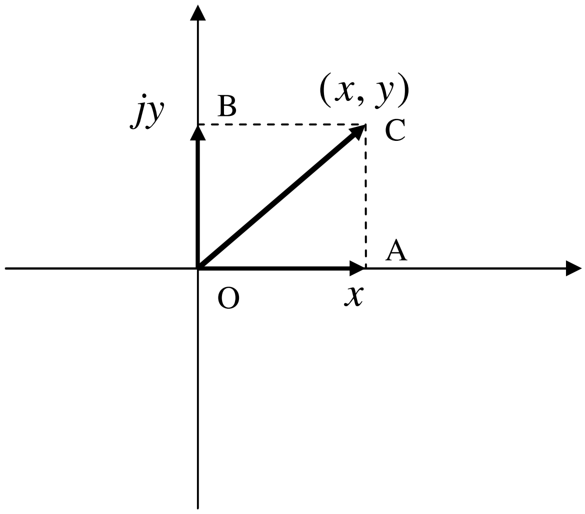
מספרים מרוכבים

נתבונן בזוג סדור (x, y) במישור $\mathbf{R}^2$.



נסמן את יחידת המדידה בציר Y כ $j,\ j = \sqrt{-1}$. אזי $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = x + jy$ ז"א כל זוג (x, y) במישור $\mathbf{R}^2$ ניתן לתאר על ידי מספר $x + jy$.

הגדרה 1.1: $z = x + jy,\ x, y \in \mathbf{R}$ נקרא **מספר מרוכב**. אוסף של כל מספרים מרוכבים נסמן כ $\mathbf{C}$.

הגדרה 1.2: $x = \mathrm{Re}(z)$ נקרא **חלק ממשי** של המספר המרוכב. $y = \mathrm{Im}(z)$ נקרא **חלק מדומה** של המספר המרוכב.

סכום של מספרים מרוכבים: $z_1 = x_1 + jy_1,\ z_2 = x_2 + jy_2 \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

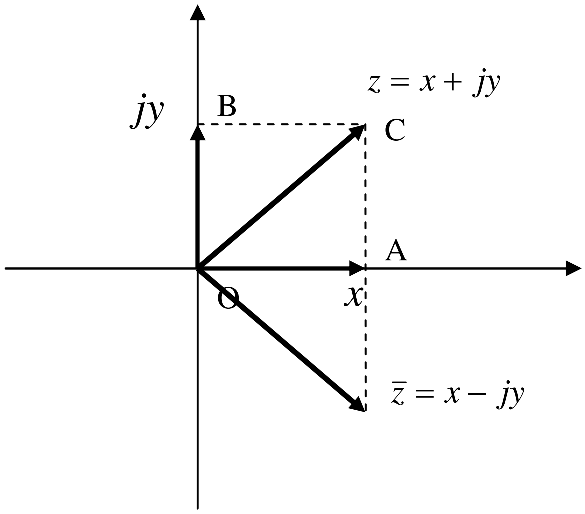
הפרש של מספרים מרוכבים: $z_1 = x_1 + jy_1,\ z_2 = x_2 + jy_2 \Rightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$

מכפלה של מספרים מרוכבים:

$$z_1 = x_1 + jy_1,\ z_2 = x_2 + jy_2 \Rightarrow z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

הגדרה 1.3: נסמן גודל של מספר הרוכב כגודל של הווקטור OC. ז"א

$$z = x + jy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$$



הגדרה 1.4: יהיה $z = x + jy$ - מספר מרוכב. נקרא $\bar{z} = x - jy$ כמספר צמוד של z.

מסקנה 1.5: $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

חילוק של מספרים מרוכבים:

$$z_1 = x_1 + jy_1,\ z_2 = x_2 + jy_2 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} =$$

$$= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + j\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

דוגמא: $z_2 = 3 + 4j;\quad z_1 = 1 + j;\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+j}{3+4j} = \frac{(1+j)(3-4j)}{(3+4j)(3-4j)} = \frac{7-j}{25} = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}j$

הגדרה 1.6: יהיה $z = x + jy$ - מספר מרוכב. נגיד ש $z^{-1} = \frac{1}{z}$ - מספר נגדי ל z.

מסקנה 1.7: $z^{-1} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{(x + jy)(x - jy)} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

דוגמא: $z = 1 + 2j;\quad z^{-1} = \frac{1}{1+2j} = \frac{1-2j}{(1+2j)(1-2j)} = \frac{1-2j}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j$

תכונות של מספרים צמודים:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

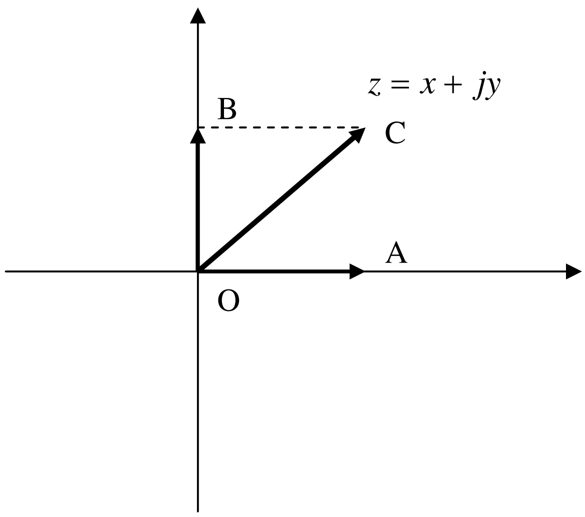
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

מספרים מרוכבים(המשך)

נתבונן במספר מרוכב $z = x + jy$.



כל מספר מרוכב ניתן להציג כווקטור OC בעל גודל $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ וכיוון המוגדר על ידי זווית שנוצר בין הווקטור וציר ממשי X (הזווית נמדד נגד כיוון השעון ומשתנה מ 0 עד 2π). מכאן נובע ש $x = r\cos\alpha;\ y = r\sin\alpha$.

הגדרה 2.1: הזווית α נקרא **ארגומנט** של המספר ומסומן כ $\alpha = \arg(z)$

מסקנה 2.2: $\sin\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \alpha = \arg(z) = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$

מסקנה 2.3: $z = x + jy = r(\cos\alpha + j\sin\alpha)$. $z = r(\cos\alpha + j\sin\alpha); \quad 0 \le \alpha < 2\pi$ **נקראת הצגה טריגונומטרית של המספר המרוכב.**

חזקה של המספר המרוכב. נוסחת מואוור (De-Moivre)

משפט 2.4: יהיו $z_2 = r_2(\cos\beta + j\sin\beta); \quad z_1 = r_1(\cos\alpha + j\sin\alpha);$ שני מספרים מרוכבים.
אזי

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)); \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta));\ r_2 \neq 0$$

הוכחה:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta + j\sin\beta) =$$
$$= r_1 r_2 ((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = r_1 r_2 (\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\alpha + j\sin\alpha)}{(\cos\beta + j\sin\beta)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta - j\sin\beta)}{(\cos\beta + j\sin\beta)(\cos\beta - j\sin\beta)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{((\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + j(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta));\ r_2 \neq 0$$

מסקנה 2.5: יהיו $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + j\sin\alpha_1), z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + j\sin\alpha_2), \ldots, z_n = r_n(\cos\alpha_n + j\sin\alpha_n)$ מספרים מרוכבים. אזי

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n(\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) + j\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n));$$

הוכחה: אינדוקציה על n

מסקנה 2.6: נוסחת מואוור (De-Moivre). : יהי $z = r(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ - מספר מרוכב. לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $z^n = r^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha)$

דוגמא:

$$z = 1 + j = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right); \quad z^{100} = \sqrt{2}^{100}\left(\cos\frac{100\pi}{4} + j\sin\frac{100\pi}{4}\right) =$$
$$= 2^{50}\left(\cos 25\pi + j\sin 25\pi\right) = 2^{50}\left(\cos(\pi + 24\pi) + j\sin(\pi+24\pi)\right) = 2^{50}\left(\cos\pi + j\sin\pi\right) = -2^{50}$$

מסקנה 2.7: $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}; \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2); \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

שורש של מספר מרוכב.

הגדרה 2.8: יהי $n \in \mathbf{N}; z \in \mathbf{C}$. נגיד ש $w = \sqrt[n]{z}$ אם $w^n = z$.

נקבל נוסחא לחישוב השורש ממספר מרוכב:

$$w = \sqrt[n]{z} \Rightarrow w^n = z \Rightarrow (r(\cos\alpha + j\sin\alpha))^n = \rho(\cos\beta + j\sin\beta) \Rightarrow r^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha) =$$
$$= \rho(\cos\beta + j\sin\beta) \Rightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ \cos n\alpha = \cos\beta \\ \sin n\alpha = \sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ n\alpha = \beta + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\beta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, 0 \le k \le n-1 \end{cases}$$
$$w = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\beta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\beta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right), 0 \le k \le n-1$$

דוגמא:

$$z = 1 + j;\ w = \sqrt[4]{z}$$

$$z = 1 + j = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right); \quad w^4 = r^4(\cos 4\alpha + j\sin 4\alpha)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2} \\ \alpha = \dfrac{\pi}{16} + 2\pi\dfrac{k}{4} = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{2},\ 0 \le k \le 3 \end{cases}$$

$$k = 0: \quad w_1 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi 0}{2} = \cos\frac{\pi}{16} + j\sin\frac{\pi}{16}$$

$$k = 1: \quad w_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi 1}{2} = \cos\frac{9\pi}{16} + j\sin\frac{9\pi}{16}$$

$$k = 2: \quad w_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi 2}{2} = \cos\frac{17\pi}{16} + j\sin\frac{17\pi}{16}$$

$$k = 3: \quad w_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi 3}{2} = \cos\frac{25\pi}{16} + j\sin\frac{25\pi}{16}$$