# עוד שאלה בחקירת פונקציית שורש

## שאלה 1

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - a}$ .

ידוע כי שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 4$ הוא $-\frac{1}{2}$ .

**א.** מצא את שני הערכים האפשריים של הפרמטר $a$ .

**ב.** הצב בתבנית הפונקציה את הערך הקטן יותר של $a$ שמצאת, וענה על הסעיפים הבאים:

**(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות שלה.

**(2)** מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

**(3)** הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

**(4)** הוכח כי לפונקציה יש פיתול בנקודה שבה $x = \frac{1}{9}$ .

**(5)** הסבר מדוע הפונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום $x > 1$ .

**(6)** שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

## פתרון

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - a} \quad , \quad f'(x) = \frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x}}(\sqrt{x} - a) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - a)^2} = \frac{1 - \frac{a}{\sqrt{x}} - 1}{(\sqrt{x} - a)^2} = -\frac{a}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - a)^2}$$

$$f'(4) \underset{\text{נתון}}{=} -\frac{a}{2(2-a)^2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{(2-a)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = (2-a)^2 \quad \Rightarrow \quad a = 4 - 4a + a^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 5a + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_1 = 4 \ , \ a_2 = 1}$$

**ב. (1)**

$$\mathbf{f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}} \quad , \quad \sqrt{x} - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{x \neq 1} \quad ; \quad \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x \geq 0}$$

**תחום הגדרה:** $(x \neq 1) \cap (x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0 \leq x < 1) \cup (x > 1)}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\to 2}{\to 0} = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{2}{1 - (\to 0)} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = 2}$$

**(2)**

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{0}{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0,0)}$$

**(3)**

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)^2} = -\frac{+}{+\,(\pm)^2} = -\frac{+}{+\,+} = - \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f'(x) < 0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f_{\searrow}} \quad (\checkmark)$$

**(4)**

$$f'(\tfrac{1}{9}) = -\frac{1}{...} \neq 0 \quad , \quad f''(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1)}\right)' = \left(-\frac{1}{x^{1.5}-2x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1.5\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x^{1.5} - 2x + \sqrt{x})^2}$$

$$f''(\tfrac{1}{9}) = \frac{0.5 - 2 + 1.5}{...} = \frac{0}{...} = 0 \quad \longrightarrow \quad f'(\tfrac{1}{9}) \neq 0 \ , \ f''(\tfrac{1}{9}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{9} \ \textit{inflection} \ (\surd)$$

($f'' = 0$ בנקודה אינו מספיק לקיום פיתול. אם גם $f' \neq 0$ באותה נקודה - אז יש פיתול.

אפשר גם לבדוק סימנים מנוגדים של $f''$ בסביבת $x = \frac{1}{9}$ . )

**(5)**

$$f''(x) = \frac{1.5\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x^{1.5}-2x+\sqrt{x})^2} = \frac{3x-4\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(\ ...\ )^2} \overset{\text{פירוק הטרינום}}{=} \frac{(3\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}(\ ...\ )^2}$$

$$\Rightarrow \ \forall x > 1 : \ f''(x) = \frac{+\ +}{2 +\ +} > 0 \quad \Rightarrow \quad \smile \quad (\surd)$$

**(6)**