

שאלה בחקירת פונקציות

שאלה

נתונה הפונקציה:

$$y = x^2 + 8/x$$

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה (דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
- ג. מצאו את נקודת הפיתול של הפונקציה.
- ד. מצאו באלו תחומים הפונקציה קעורה כלפי מעלה, ובאלו תחומים היא קעורה כלפי מעלה.

פתרון

א. תחום הגדרה הטבעי של הפונקציה הוא:

$$x \neq 0$$

א:

$$-\infty < x < 0$$

ב:

$$0 < x < \infty$$

ב. נשווה את הנגזרת ל-0:

$$y' = 0$$

$$2x - 8/x^2 = 0$$

$$x - 4/x^2 = 0$$

$$x^3 = 4$$

$$x = 4^{(1/3)} \approx 1.59$$

ומכיוון שהפונקציה שואפת לאינסוף הן כאשר x שואף ל-0 מימין, והן כאשר הוא שואף לאינסוף, אזי ניתן לקבוע בוודאות, ללא כל חישובים נוספים, שבנקודה זו יש לפונקציה מינימום.

ג. נקודת פיתול יכולה להיות במקום בו הנגזרת השנייה שווה 0, והנגזרת השלישית שונה מ-0 (אם גם היא שווה 0, אזי יש צורך בבדיקה נוספת).

נשווה את הנגזרת השנייה ל-0:

$$y'' = 0$$

$$2 - 8(-2)/x^3 = 0$$

$$1 + 8/x^3 = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = -2$$

$$y''' = -48/(x^4) \neq 0$$

משמע $x = -2$ היא נקודת פיתול, היחידה.

ד. הפונקציה קעורה כלפי מטה כאשר הנגזרת השנייה קטנה מ-0:

$$y'' < 0$$

$$2 + 16/x^3 < 0$$

$$1 + 8/x^3 < 0$$

$$(x^3 + 8) / x^3 < 0$$

$$x^3 + 8 > 0$$

$$x^3 < 0$$

$$-2 < x < 0$$

בכל שאר התחומים (כמובן גם למעט הנקודות 0 ומינוס 2), הפונקציה קמורה כלפי מעלה:

$$y'' > 0$$

$$2 + 16/x^3 > 0$$

$$1 + 8/x^3 > 0$$

$$(x^3 + 8) / x^3 > 0$$

1.

$$x^3 > 0$$

$$x > 0$$

2.

$$x^3 + 8 < 0$$

$$x < -2$$