

שתי שאלות במשוואות

שאלה 1

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 10}{mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

עבור אילו ערכי m גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מעל ציר x ?

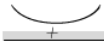
פתרון:

$$\text{הדרישה היא: } \frac{x^2 - 5x + 10}{mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 1} > 0 \quad \text{לכל ערך של } x.$$

אי-שוויון זה מתקיים בכל אחד מהמצבים הבאים:

(המונה חיובי וגם המכנה חיובי) או (המונה שלילי וגם המכנה שלילי)

$$\text{למונה אין שורש: } x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{-15}}{2} = \emptyset \quad \text{הוא } x^2 \text{ של } a = 1 > 0$$

הגרף של המונה הוא:  ולכן המונה חיובי עבור כל ערך של x .

מספיק, אם-כן, לבדוק רק מתי המכנה חיובי:


$$\underline{mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 1 > 0} :$$

$$(1) \underline{a > 0} \quad m > 0$$

$$(2) \underline{\Delta < 0} \quad 4(m-2)^2 - 4m(2m-1) < 0 \Rightarrow (m-2)^2 - m(2m-1) < 0$$

$$m^2 - 4m + 4 - 2m^2 + m < 0 \Rightarrow -m^2 - 3m + 4 < 0$$

$$m_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{-2} \Rightarrow m_1 = -4, m_2 = 1, a_m = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \text{  } \Rightarrow \underline{(m < -4) \cup (m > 1)}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow m > 1$$

עבור $m = 0$ נקבל במכנה: $4x - 1$

ביטוי זה אינו חיובי לכל ערך של x .

לכן התשובה שקיבלנו היא התשובה הסופית.

שאלה 2

$$y = mx^2 - 2(m+2)x + 5m - 2$$
 נתונה הפונקציה

א. עבור אילו ערכי m יהיה גרף הפונקציה הנתונה כולו מעל ציר x ?

ב. עבור אילו ערכי m יהיה גרף הפונקציה הנתונה כולו מעל ציר x ,

וגם יחתוך את הישר $y = -10x + 13$ בשתי נקודות שונות?

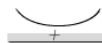
פתרון:

$$y = mx^2 - 2(m+2)x + 5m - 2 \quad \text{א.}$$

אפשרות א: הפונקציה אינה ריבועית: $m = 0$

במקרה זה מתקבלת הפונקציה הליניארית: $y = -4x - 2$

הדרישה לחיוביות הפונקציה לכל x אינה מתקיימת.

אפשרות ב: הפונקציה ריבועית: הגרף המבוקש הוא: 

$$(1) \quad \underline{a > 0}: \quad \underline{m > 0}$$

$$(2) \quad \underline{\Delta < 0}: \quad \Delta = 4(m+2)^2 - 4m(5m-2) < 0 \Rightarrow 4m^2 + 16m + 16 - 20m^2 + 8m < 0$$

$$\Rightarrow -16m^2 + 24m + 16 < 0 \quad /: 8 \Rightarrow -2m^2 + 3m + 2 < 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{-4} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = 2, \quad a_m = -2 < 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{m < -\frac{1}{2} \cup m > 2}}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow \underline{m > 2}$$

ב.

$$mx^2 - 2(m+2)x + 5m - 2 = -10x + 13 \Rightarrow mx^2 - 2mx - 4x + 5m + 10x - 15 = 0$$

$$mx^2 - (2m-6)x + (5m-15) = 0$$

$$(1) \quad \underline{a \neq 0}: \quad \underline{m \neq 0}$$

$$(2) \underline{\Delta > 0}: \Delta = (2m - 6)^2 - 4m(5m - 15) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 24m + 36 - 20m^2 + 60m > 0$$

$$-16m^2 + 36m + 36 > 0 \quad /:4 \Rightarrow -4m^2 + 9m + 9 > 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-9 \pm 15}{-8} \Rightarrow m_1 = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}, \quad m_2 = \frac{-24}{-8} = 3, \quad a_m = -4 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{-\frac{3}{4} < m < 4}}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow \underline{\underline{\left(-\frac{3}{4} < m < 0\right) \cup \left(0 < m < 4\right)}}$$

חיתוך התחום שהתקבל עם התחום של סעיף א':

$$\left(\left(-\frac{3}{4} < m < 0\right) \cup \left(0 < m < 4\right)\right) \cap (m > 2) \Rightarrow \mathbf{2 < m < 4}$$