עוד שאלה במספרים מרוכבים

שאלה

א. z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שחלקם המדומה אינו אפס. הוכיחו כי אם z_1+z_2 וגם $z_1\cdot z_2$ הם מספרים ממשיים, אז $z_2=\overline{z_1}$.

ב. נתונה סדרה הנדסית: $-i,\quad 1-i,\quad 2,\ldots$. מצאו את a_9.

פתרון

א. נגדיר:

$$Z_1 \equiv a+bi$$
$$Z_2 \equiv c+di$$

(כאשר a, b, c, d הם כולם מספרים ממשיים)

יש להוכיח כי $Z_2=\bar{Z}_1$ או למעשה: c+di=a-bi

על מנת ששוויון זה יהיה נכון, צריכים להתקיים התנאים הבאים:

1) c=a

2) d=-b

נוכיח את נכונות שני התנאים:

נתון כי Z_1+Z_2 הוא מספר ממשי. כלומר:

$a+bi+c+di=$ ממשי

אם המספר ממשי, החלק הדמיוני שלו שווה ל – 0, מכאן ש:

b+d=0

d=-b

כלומר תנאי 1) מתקיים.

בנוסף, נתון כי $Z_1 * Z_2$ הוא גם מספר ממשי, כלומר:

$(a+bi)*(c+di)=$ ממשי

נפתח את הסוגריים:

$ac+adi+bci-bd=$ ממשי

נשווה את החלק הדמיוני של הביטוי ל – 0:

ad+bc=0

ad=-bc

לפי המשוואה הקודמת d=-b. נציב –b באגף שמאל במקום d, ונקבל:

-ba=-bc

a=c

כלומר תנאי 2) מתקיים.

מכיוון שהוכחנו את נכונות שני התנאים, הוכחנו כי c+di=a-bi ונובע מכך כי $Z_2=\bar{Z}_1$.

ב. ראשית, נחשב את מנת הסדרה. מנת הסדרה שווה למנת שני איברים עוקבים:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1-i}{-i}=\frac{(1-i)(i)}{-i(i)}=\frac{i+1}{1}=1+i$$

ננסח את האיבר הכללי של הסדרה, לפי איבר כללי של סדרה הנדסית:

$$a_n=-i(1+i)^{n-1}$$

ומכאן ש:

$$a_9=-i(1+i)^8$$

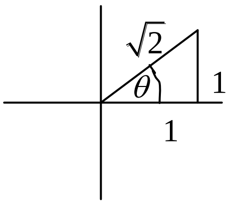
על מנת לחשב את $(1+i)^8$, נעביר את הביטוי $(1+i)$ לתצוגה קוטבית:

$R=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\tan\theta=\frac{1}{1}\rightarrow\theta=45°$

המספר בתצוגה קוטבית הוא :

$\sqrt{2}cis45°$



כעת נחשב את החזקה:

$$(\sqrt{2}cis45°)^8=\left[\left(\sqrt{2}\right)^8 cis45*8\right]=16cis360°$$

נחזיר את המספר לתצוגה קרטזית:

$$16cis360°=16(\cos360°+\sin360°i)=16*1+16*0=16$$

$$a_9=-i*16=-16i$$