עוד שתי שאלות במספרים מרוכבים

שאלה 1

א. אחד מפתרונות המשוואה $(1+i)z^2 - kz + 4i = 0$ הוא $z_1 = i$.

(1) מצא את k **(2)** מצא את הפתרון השני z_2 של המשוואה.

ב. z_1 ו־ z_2 הם מספרים מרוכבים . הוכח כי $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

<u>הערה:</u> אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א. **(1)**

$$(1+i)z^2 - kz + 4i = 0 \;,\; z_1 = i \quad\Rightarrow\quad (1+i)\cdot i^2 - ki + 4i = 0 \quad\Rightarrow\quad i^2 + i^3 - ki + 4i = 0$$

$$-1 - i - ki + 4i = 0 \quad\Rightarrow\quad -1 + 3i - ki = 0 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{3i-1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{3+i}{1} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{k = 3 + i}$$

(2)

$$(1+i)z^2 - (3+i)z + 4i = 0$$

$$\underbrace{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}_{\text{וייטה}} \quad\Rightarrow\quad i + z_2 = \frac{3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i+i+1}{1+1} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i \quad\Rightarrow\quad \mathbf{z_2 = 2 - 2i}$$

אפשר גם לפתור לפי נוסחת הפתרון של המשוואה הריבועית. לא מומלץ.

תראו כמה זה קצר עם וייטה.

ב.

$$z_1 = a + bi \;,\; z_2 = c + di$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{ac + adi + bci - bd} = \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (a-bi)\cdot(c-di) = ac - adi - bci - bd = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} \quad (\surd)$$

דרך קצת יותר 'אלגנטית' (בתודה למורה **עופר ילין** מפתח תקוה):

נסמן: $z_1 = r_1 \text{ cis } \alpha_1 \;,\; z_2 = r_2 \text{ cis } \alpha_2$

$$\mathbf{\overline{z_1 \cdot z_2}} = \overline{r_1 \text{ cis } \alpha_1 \cdot r_2 \text{ cis } \alpha_2} = \overline{r_1\, r_2 \text{ cis } (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$= r_1\, r_2 \text{ cis } (-(\alpha_1 + \alpha_2)) = r_1\, r_2 \text{ cis } (-\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$= r_1\, r_2 \text{ cis } (-\alpha_1) \text{ cis } (-\alpha_2) = r_1 \text{ cis } (-\alpha_1)\, r_2 \text{ cis } (-\alpha_2) = \mathbf{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} \quad (\surd)$$

שאלה 2

בסדרה הנדסית $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ . \ . \ .$ נתון: $a_7 = 64 + 64i \ , \ a_4 = -8 + 8i$. מצא את a_1 .

פתרון

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 q^6}{a_1 q^3} = q^3 = \frac{64+64i}{-8+8i} = \frac{8+8i}{-1+i} = \frac{8+8i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-8-8i-8i+8}{1+1} = \frac{-16i}{2} = -8i$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot (-8i) = -8 + 8i \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{-8+8i}{-8i} = \frac{-1+i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i-1}{1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = -1 - i}$$