

תרגול נוסף במספרים מרוכבים

שאלה 1

קדקודי מתומן משוכלל ABCDEFGH (מצולע בעל 8 צלעות) נמצאות במישור גאוס, ומרכז המתומן נמצא בראשית הצירים. נתון כי קדקוד A הוא $z = 1 + i$. מצא את הקדקודים B ו-H. הצג אותם באמצעות מספרים מרוכבים.

פתרון

3. שני הקדקודים המבוקשים סמוכים ל-A. נניח שהם כמסומן בציור. רדיוס המעגל החוסם את המתומן הוא $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. הזווית המרכזית של מתומן משוכלל היא $360^\circ : 8 = 45^\circ$. לכן שני הקדקודים המבוקשים נמצאים במרחק אותו רדיוס ובזווית של 45° מהקדקוד הנתון. הקדקוד הנתון נמצא בזווית של 45° ($\theta = \arctan \frac{1}{1}$). $\pm 45^\circ$ - נקבל את הקדקודים על החלק החיובי של הצירים, ובמרחק של $\sqrt{2}$ י"א מ $(0, 0)$. ולכן: $B: \sqrt{2}$, $H: \sqrt{2}i$.
ואפשר גם לפי מואבר:

$$\sqrt[8]{z} = 1 + i \Rightarrow z = (1 + i)^8, \quad r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = (\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^8 = 16 \operatorname{cis} 2\pi = 16 \operatorname{cis} 0$$

$$z_k = \sqrt[8]{16} \operatorname{cis} \frac{0 + 2\pi k}{8} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi k}{4}$$

$$\underline{k_A}: \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow k_A = 1$$

$$k_A = 1 \Rightarrow k_B = 8, k_H = 2 \Rightarrow \underline{B}: z_8 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 2\pi = \sqrt{2} (1 + 0i) \Rightarrow \underline{B}: \sqrt{2}$$

$$\underline{H}: z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} (0 + 1 \cdot i) \Rightarrow \underline{H}: \sqrt{2}i$$

