שאלות נוספות במספרים מרוכבים

שאלה 1

נתונה המשוואה $2z^2-(m-2)^2z-\frac{1}{8}i=0$, z – מספר מרוכב, m – פרמטר מרוכב.

א. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הנתונה.

מצא עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=-4$

פתרון.יש למצוא את ערכי m עבורם $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=4$.

לפי נוסחאות ויאטה קיים $z_1+z_2=\frac{m-2}{2}$ ו- $z_1z_2=-\frac{1}{16}i$. לכן

$\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{m-2}{2\cdot\left(-\frac{1}{16}i\right)}=8(m-2)i$, ועלינו לפתור את 8(m-2)i=-4, כלומר $(m-2)i=-\frac{1}{2}$,

כלומר $m-2=\frac{1}{2}i$ ולכן $m=2+\frac{1}{2}i$.

ב. (1) מצא עבור אלו ערכים של m יש למשוואה פתרון יחיד.

פתרון: הפתרון הוא יחיד כאשר הדיסקרימיננטה שווה ל-0, כלומר כאשר

$(m-2)^4-4\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{8}i\right)=(m-2)^4+i=0$, כלומר כאשר $(m-2)^4=-i$.

נכתוב $cis(\alpha)$ עבור $\cos\alpha+i\sin\alpha$ (הסימון המתמטי המקובל לכך הוא $e^{\alpha i}$).

מכיוון ש- $-i=cis\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ ולפי נוסחת דה-מואבר השורשים הרביעיים של i- מתקבלים ע"י חילוק

זווית זאת ב-4 והוספת רבעים של 2π, לכן $m-2=cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$, כאשר k=0,1,2,3, ולכן

$m=2+cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$, כאשר k=0,1,2,3, הם ערכי m עבורם יש למשוואה פתרון יחיד.

ג. מצא אילו ערכים של m, מבין הערכים שמצאת בסעיף א, נמצאים ברביע הראשון במישור גאוס.

פתרון. הרכיב הממשי של $cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$ קטן או שווה בערכו המוחלט מן הערך המוחלט של

$cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$ שהוא 1. לכן הרכיב הממשי של $cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$ הוא בין 1 ל-3, ולכן מספר זה

נמצא תמיד ברביע הראשון או הרביעי, והוא נמצא ברביע הראשון בדיוק אז כאשר $\sin\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$

חיובי. זה קורה כאשר הזווית $\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi$ היא בין 0 ל- π, כלומר, כאשר k הוא 0 או 1, ולכן מבין ערכי m הנ"ל נמצאים $2+cis\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ ו- $2+cis\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ ברביע הראשון.

הראה כי פתרונות המשוואה הנתונה עבור כל הערכים של m שמצאת בתת סעיף ב(1).

(2) נמצאים על ישר אחד העובר בראשית הצירים.

(3) נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים..

.

פתרון. המשוואה הנתונה היא, עבור ערכי m המתאימים, $2z^2-cis^2\left(\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)\pi\right)z-\frac{1}{8}i=0$, כאשר k=0,1,2,3, ומכיוון שהדיסקרימיננטה היא 0 לכן הפתרון הוא $\frac{1}{4}cis^2\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)\pi$. ושימוש בנוסחת דה-מואבר נותן שהפתרון הוא $\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}+k\right)\pi$, ולכן הוא, עבור k זוגי $\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}\right)\pi=\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i$ ועבור k איזוגי $\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}+1\right)\pi=-\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i$. לכן כל הפתרונות הם על הישר שמשוואה שלו היא $y=-x$.

מכיון שערכיהם המוחלטים הם ¼ הפתרונות נמצאים על המעגל סביב הראשית שרדיוסו ¼.

שאלה 2

נתונה המשוואה $2z^2-(m-2)^2z-\frac{1}{8}i=0$, z – מספר מרוכב, m – פרמטר מרוכב.

א. מצא עבור אלו ערכים של m יש למשוואה פתרון יחיד.

פתרון: הפתרון הוא יחיד כאשר הדיסקרימיננטה שווה ל-0, כלומר כאשר

$(m-2)^4-4\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{8}i\right)=(m-2)^4+i=0$, כלומר כאשר $(m-2)^4=-i$.

נכתוב $cis(\alpha)$ עבור $\cos\alpha+i\sin\alpha$ (הסימון המתמטי המקובל לכך הוא $e^{\alpha i}$).

מכיוון ש- $-i=cis\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ ולפי נוסחת דה-מואבר השורשים הרביעיים של i- מתקבלים ע"י חילוק זווית זאת ב-4 והוספת רבעים של 2π, לכן $m-2=cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$, כאשר k=0,1,2,3, ולכן $m=2+cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$, כאשר k=0,1,2,3, הם ערכי m עבורם יש למשוואה פתרון יחיד.

ב. מצא אילו ערכים של m, מבין הערכים שמצאת בסעיף א, נמצאים ברביע הראשון במישור גאוס.

פתרון. הרכיב הממשי של $cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$ קטן או שווה בערכו המוחלט מן הערך המוחלט של $cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$ שהוא 1. לכן הרכיב הממשי של $cis\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$ הוא בין 1 ל-3, ולכן מספר זה נמצא תמיד ברביע הראשון או הרביעי, והוא נמצא ברביע הראשון בדיוק אז כאשר $\sin\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$ חיובי. זה קורה כאשר הזווית $\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi$ היא בין 0 ל- π, כלומר, כאשר k הוא 0 או 1, ולכן מבין ערכי m הנ"ל נמצאים $2+cis\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ ו- $2+cis\left(\frac{7}{8}\pi\right)$ ברביע הראשון.

ג. (1) הראה כי פתרונות המשוואה הנתונה עבור כל הערכים של m שמצאת בסעיף א, נמצאים על ישר אחד במישור גאוס.

(2) מצא את משוואת הישר.

פתרון. המשוואה הנתונה היא, עבור ערכי m המתאימים, $2z^2-cis^2\left(\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)\pi\right)z-\frac{1}{8}i=0$, כאשר k=0,1,2,3, ומכיוון שהדיסקרימיננטה היא 0 לכן הפתרון הוא $\frac{1}{4}cis^2\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)\pi$. ושימוש בנוסחת דה-מואבר נותן שהפתרון הוא $\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}+k\right)\pi$, ולכן הוא, עבור k זוגי

$\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}\right)\pi=\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i$ ועבור k איזוגי

$\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}+1\right)\pi=-\frac{1}{4}cis\left(\frac{3}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i$. לכן כל הפתרונות הם על הישר שמשואה שלו היא $y=-x$