<u>שאלה במספרים מרוכבים</u>

<u>שאלה</u>

$z=\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.

א. פתרו את המשוואה $z\cdot\bar{z}=z+\bar{z}$.

ב. שני הפתרונות שנמצאו בסעיף א הם שני קדקודים של משולש שווה צלעות החסום במעגל היחידה. מצאו את הקדקוד השלישי.

<u>פתרון</u>

א. אם $z=\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha$ הרי ש- $z=\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha$. כמו כן, כיוון ש- z נמצא על מעגל היחידה, הרי ש-$z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$, ולכן

$$1=\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha+\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha=2\cos\alpha$$
$$\cos\alpha=0.5$$
$$\alpha=\pm60^o+360^o k$$

$\alpha_1=60^o$ $\qquad\qquad$ $\alpha_2=300^o$

$$z_2=\cos60^o+i\cdot\sin60^o=0.5+\frac{i\sqrt{3}}{2}\qquad z_2=\cos300^o+i\cdot\sin300^o=0.5-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

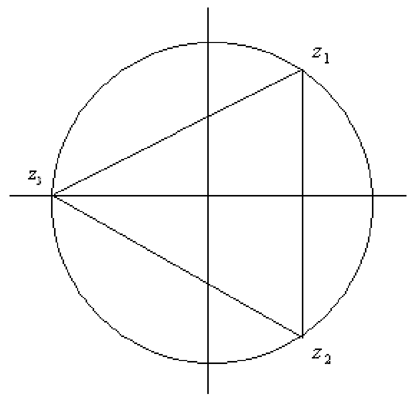
ב. ניתן לפתור סעיף זה בשתי דרכים – אלגברית וגיאומטרית.

הדרך האלגברית היא להציג את הפתרונות על ידי שימוש ב-"cis". נקבל כי $z_1=\text{cis}60^o$ וכי $z_2=\text{cis}300^o$. לכן הקדקוד השלישי חייב להיות "באמצע הדרך" בין 60^o ו- 300^o, כלומר ב- 180^o, ולכן הקדקוד השלישי הוא

$$z_3=cis180^o=\cos180^o+i\cdot\sin180^o=-1$$

ונמצא על ציר ה- x.

ניתן גם לשרטט את המעגל ואת המשולש:



ציר ה-x אנך אמצעי לצלע שקדקודיה הם z_1 ו-z_2 ולכן הקדקוד השלישי של המשולש חייב להימצא על ציר ה-x, וזה יכול להיות רק בנקודה $z_3 = 1$.