עוד שאלה באינטגרלים

שאלה

הישר $y=x-2a$ חותך את הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ בנקודה P $(a>0)$. בנקודת החיתוך p העבירו משיק לפונקציה. הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- y.

פתרון

נחשב תחילה את שיעורי הנקודה P:

$$x-2a=\sqrt{ax}$$
$$x^2-4ax+4a^2=ax$$
$$x^2-5ax+4a^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-16a^2}}{2}=\frac{5a\pm3a}{2}=\left\langle\begin{matrix}4a\\a\end{matrix}\right.$$

קיבלנו שני פתרונות, אולם כיוון שהעלינו את אגפי המשוואה בריבוע, רק אחד מהם מתאים. נבדוק איזה מהם הוא הפתרון המתאים.

עבור $x=a$ נקבל:

$$a-2a=-a$$
$$\sqrt{a\cdot a}=a$$

ואילו עבור $x=4a$ נקבל:

$$4a-2a=2a$$
$$\sqrt{a\cdot 4a}=2a$$

לכן שיעורי הנקודה P הם $P(4a,2a)$.

כעת נחשב את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה P. שיפועו שווה לערך נגזרת הפונקציה בנקודה זו; נגזור:

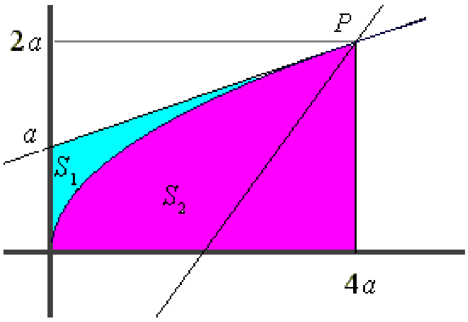
$$f(x)=\sqrt{ax}$$
$$f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax}}$$
$$f'(4a)=\frac{a}{2\sqrt{a\cdot 4a}}=\frac{a}{2\cdot 2a}=\frac{1}{4}$$

ולכן משוואת המשיק היא:

$$y-2a=\frac{1}{4}(x-4a)$$

$$y=\frac{x}{4}+a$$

כעת יש בידנו את כל האינפורמציה הדרושה לחישוב השטח הדרוש.



נחשב את השטח בשני שלבים: תחילה נחשב את השטח S_2 הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=4a$ (השטח הורוד בשרטוט) על ידי אינטגרציה. לאחר מכן נחשב את השטח הכלוא בין המשיק $y=\frac{x}{4}+a$, , ציר ה- x והישר $x=4a$ (השטח הורוד והתכול בשרטוט) על ידי הנוסחה לחשוב שטח טרפז. השטח המבוקש הוא הפרש השטחים. נחשב:

$$S_2=\int_0^{4a}\sqrt{ax}ds=\sqrt{a}\int_0^{4a}x^{0.5}dx=\sqrt{a}\cdot\frac{x^{1.5}}{1.5}\Big|_0^{4a}=\sqrt{a}\cdot\frac{4a\sqrt{4a}}{1.5}=\frac{8a^2}{1.5}=\frac{16a^2}{3}$$

$$S_1+S_2=\frac{(a+2a)\cdot 4a}{2}=6a^2$$

$$S_1=(S_1+S_2)-S_2=6a^2-\frac{16a^2}{3}=\frac{16a^2}{3}$$