<u>חזרה על החומר של חשבון אנטגראלי לשאלון 006</u>

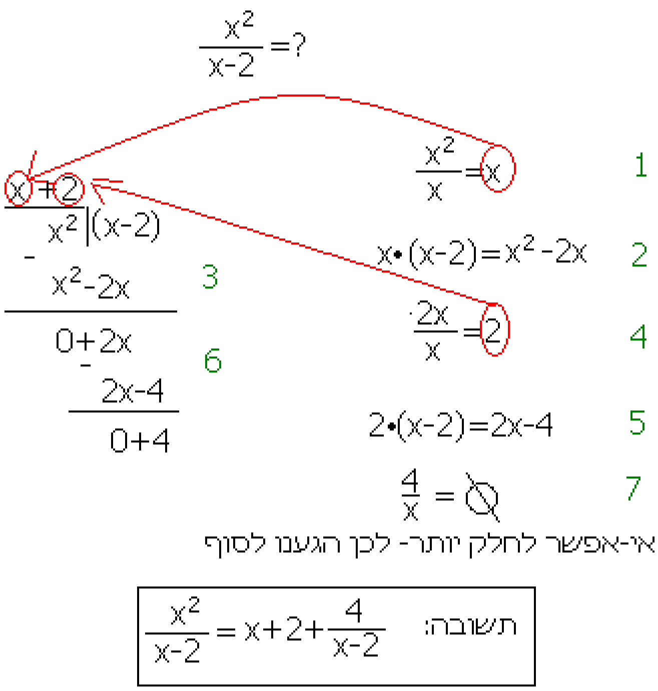
יש שאלות, שבהן בד"כ יש חלק של חשבון אינטגראלי של פונקציה נתונה.

כמו שרובכם יודעים, רוב האינטגרלים המוכרים הם יצורים שאפשר לפתור אותם בעזרת שיטות מתמטיות שונות, כמו פירוק שבר בעזרת חילוק פולינומים או בשיטת ההצבה.

נחזור על השיטות האלה:

1. <u>חילוק פולינומים</u>- בשיטה זו משתמשים כאשר נתונה פונקצית מנה, ובה מנסים "להיפטר" מפולינום שעושה את האינטגרל בלתי-ניתן לביצוע.

ראה חישוב משמאל.



<u>בשלב 1</u> מחלקים את המשתנה בחזקה הכי גבוהה במחולק במשתנה בחזקה הכי גבוהה במחולק. את מה שמקבלים מציבים בתוצאה.

<u>בשלב 2</u> כופלים את המנה שהתקבלה בשלב 1 במחולק.

<u>בשלב 3</u> מחסרים את המחלק מהמכפלה משלב 2 ורושמים את התוצאה.

<u>בשלב 4</u>, את מה שהתקבל בשלב 3 מחלקים שוב במשתנה בחזקה הכי גבוהה במחולק. את מה שהתקבל רושמים בתוצאה.

<u>בשלב 5</u> כופלים את המנה משלב 4 במחולק ורושמים בהמשך החילוק.

<u>בשלב 6</u> מבצעים חיסור של מה שהתקבל בשלב 3 ממה שהתקבל בשלב 5.

ממשיכים בביצוע החילוק (דומה מאוד לחילוק ארוך...) עד שמגיעים לביטוי שאי-אפשר לצמצם- כמו בדוגמה שהבאתי.

2. קיימת חלופה לחילוק פולינומים והיא לעשות מניפולציות על המונה כך שיהיה פונקציה של המכנה. את הדוגמה שהבאתי ניתן לפתור כך:

אפשר לראות שהמונה הוא חלק מנוסחת כפל מקוצר של המכנה. נחבר ונחסר 4:

$$\frac{x^2}{x-2}=\frac{x^2+4-4}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}+\frac{4}{x-2}$$

קיבלנו חלק מנוסחת כפל מקוצר- $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$.

נצמצם בהתאם ונקבל- $\frac{x^2}{x-2}=x+2+\frac{4}{x-2}$. אפשר לוודא שהנוסחה אכן נכונה בעזרת כפל במכנה משותף ומקבלים זהות.

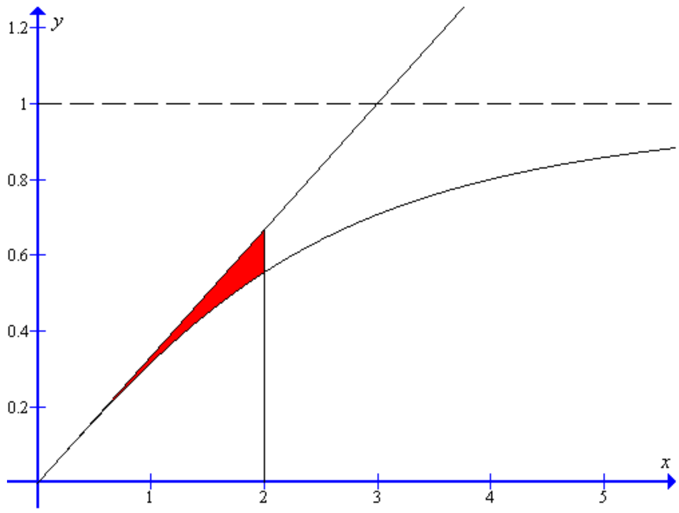
בשאלון 06 אין שארית למנה (כי עוד לא יודעים מניפולציות של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות), ותמיד מקבלים פונקציה יפה ומסודרת.

3. ידועה גם שיטת ההצבה, טריק מבורך שמציל מאינטגרלים קצת קשים.. בשיטה הזו ניתן להשתמש רק כשיש קשר של מכפלה בין הגורמים בפונקציה.

ניקח את התרגיל הבא (לקוח בחלקו מבחינת בגרות של שאלון 06)-

לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ העבירו משיק דרך נקודת החיתוך שלו עם ציר x.

מצא את השטח המוגבל בין ישר זה, גרף הפונקציה והישר $x=2$ (צבוע באדום)



גרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים (0,0) והמשיק עובר דרך נקודה זו.

נגזור ונמצא את ערך הנגזרת עבור x=0. $f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+9}-x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}$. נעשה

מכנה משותף במונה ונקבל- $f'(x)=\frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=\frac{9}{\sqrt{x^2+9}\cdot(x^2+9)}=\frac{9}{\left(x^2+9\right)^{1.5}}$.

נציב x=0 ונקבל- $f'(0)=\frac{9}{\left(0^2+9\right)^{1.5}}=\frac{9}{9^{1.5}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=1/3$.

המשיק עובר דרך ראשית הצירים ולכן משוואתו היא מהצורה- $y=f'(x_1)\cdot x$. נציב

ונקבל- $y=\frac{x}{3}$.

נחשב את האינטגרל $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$ שנחוץ להמשך הרגיל בשיטת ההצבה.

$$x^2+9=u/()'$$

נסמן- $2xdx=du$. נציב באינטגרל המקורי ונקבל-

$$dx=\frac{du}{2x}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2\cancel{x}}=\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=\sqrt{u}=\sqrt{x^2+9}\ .$$

נעבור לחישוב השטח (ניעזר בגרף הפונקציה והמשיק)-

$$S=\int_0^2\left[\frac{xdx}{3}\right]-\int_0^2\left[\frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}\right]=\frac{x^2}{6}\Bigg]_0^2-\sqrt{x^2+9}\,\Bigg]_0^2=\left(\frac{2^2}{6}-\frac{0^2}{6}\right)-\left(\sqrt{2^2+9}-\sqrt{0^2+9}\right)=$$

$$\frac{4}{6}+\sqrt{9}-\sqrt{13}=3\frac{2}{3}-\sqrt{13}\approx 0.0611$$

תשובה: גודל השטח המבוקש הוא $3\frac{2}{3}-\sqrt{13}$ או בקירוב 0.611.

<u>הערה</u>: יכולים להופיע תרגילים שבהם נתונה פונקציה שאי-אפשר לעשות לה אינטגרציה בשיטות מוכרות, אבל יהיה נתון ביטוי שהוא, באמת תוצאת האינטגרציה של הפונקציה.

<u>לדוגמה</u>- העזר בנגזרת של הפונקציה $y=x\cdot\cos(x)$ וחשב את האינטגרל הבא- $\int_{\pi}^{2\pi}\left[\cos(x)-x\cdot\sin(x)+3x^2-2x\right]dx$. אתה יכול להשאיר את תשובתך עם π או לעגל לשלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

<u>תשובה</u>: נחשב את הנגזרת של y - $y'=\cos(x)\cdot 1-x\cdot\sin(x)=\cos(x)-x\cdot\sin(x)$.

עכשיו נפצל את האינטגרל המקורי לשנים. נבצע אינטגרציה עבור כל חלק בנפרד:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\left[\cos(x)-x\cdot\sin(x)+3x^2-2x\right]dx=\int_{\pi}^{2\pi}\left[\cos(x)-x\cdot\sin(x)\right]dx+\int_{\pi}^{2\pi}\left[3x^2-2x\right]dx=$$

$$x\cdot\cos(x)\Big]_{\pi}^{2\pi}+\left(3x^2-2x\right)_{\pi}^{2\pi}=\left(2\pi\cdot\cos[2\pi]-\pi\cdot\cos(\pi)\right)+\left[\left(3\cdot\{2\pi\}^2-2\cdot 2\pi\right)-\left(3\cdot\pi^2-2\pi\right)\right]=$$

$$2\pi-(-\pi)+3\cdot 4\pi^2-2\cdot 2\pi-3\pi^2+2\pi=9\pi^2+\pi\approx 91.968$$

תוצאת האינטגרל הנתון היא $9\pi^2+\pi$ או בקירוב 91.968.