

שיטות אינטגרציה 1

(1) מבוא. אינטגרציה היא פעולה הפוכה לגזירה:

$$F'(x) = f(x) \implies \int f(x) dx = F(x) + C$$

לכן כל תרגיל גזירה ניתן להפוך מייד לתרגיל אינטגרציה.

דוגמאות:

$$(\sin x)' = \cos x \implies \int \cos x dx = \sin x + C \quad \text{א}$$

$$(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \implies \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \quad \text{ב}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \implies \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad \text{ג}$$

תשובה אחרונה מתאימה רק ל- $x > 0$. אבל הפונקציה $\frac{1}{x}$ מוגדרת גם ל-
 $x < 0$ ואז התשובה לא מספיקה. קל לראות כי ל- $x < 0$ מתקיים

$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ כך שהתשובה ל- $x < 0$ היא $\ln(-x) + C$.
ניתן לאחד אותן לתשובה יחידה:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

(2) שיטה 1: אינטגרציה בניחוש ובדיקה

אם תרגיל גזירה לא נתון, לפעמים אפשר לנחש תשובה על סמך נסיון קודם. ליתר
בטחון יש לבדוק כל תשובה ע"י הפעולה ההפוכה שהיא גזירה.

דוגמאות:

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \quad \text{א) לבדוק כי}$$

פתרון:

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C \quad \text{ב) לבדוק כי}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} (\ln(x + \sqrt{x^2+4}))' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4} + x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \end{aligned}$$

תרגילים: לנחש תשובה ולבדוק אותה ע"י גזירה

$$\int e^{-x} \quad \text{א) } \int \frac{dx}{x^2} \quad \text{ב) } \int \tan x \, dx$$

הערה: לאינטגרציה בניחוש הפונקציה $f(x)$ יכולה להיות לא פשוטה בצורתה, אבל

חייבת להיות ידועה כתשובה לתרגיל גזירה איזשהו. כתוצאה מכך לא ניתן

להשוות אינטגרלים במבט ראשון כמו בגזירה.

דוגמאות:

$$\text{א) קל לנחש את האינטגרל } \int \frac{dx}{\cos^2 x} \quad (\text{הוא } \tan x + C)$$

$$\text{ויותר קשה לנחש } \int \cos^2 x \, dx$$

$$\text{ב) קל לנחש את האינטגרל } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{הוא } \arcsin x + C)$$

$$\text{ובהרבה יותר קשה לחשב את האינטגרל } \int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$\text{ג) לא כל כך קשה לנחש אינטגרל } \int \frac{dx}{x \ln x} \quad (\text{הוא } \ln |\ln x| + C)$$

$$\text{ואי-אפשר לנחש אינטגרל } \int \frac{dx}{\ln x} \quad (\text{מפני שהוא לא פונקציה אלמנטרית}).$$

(3) לוח אינטגרלים יסודיים

מספר אינטגרלים פשוטים ותדירים כדאי לזכור בעל-פה כדי לא לנחש אותם

כל פעם מחדש.

להלן נציג אינטגרלים מיידיים..

תרגיל: בדוק את נכונותם ע"י גזירת התשובות..

$$1) \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \in \mathbb{R}, p \neq -1)$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a \neq 0)$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$8) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$11) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$12) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$13) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$14) \int \ln x = x \ln x - x + C$$