

שיטות אינטגרציה 2

(4) שיטה 2: אינטגרציה מיידיית

לחישוב אינטגרלים רבים מספיק להשתמש בתכונות האינטגרציה הבאות:

$$1) \int Af(x) dx = A \int f(x) dx, \quad A = \text{const}$$

$$2) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$3) \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C; \quad a, b = \text{const}$$

דוגמאות:

א

$$\begin{aligned} \int (Ax^2 + Bx + D) dx &= A \int x^2 dx + B \int x dx + D \int dx = \\ &= \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Dx + C \end{aligned}$$

ב

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

ג

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \\ &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

תרגילים: חשב את האינטגרלים הבאים (לעזרתכם נתונות תשובות אבל סדר התשובות

לא זהה לסדר אינטגרלים)

$$\begin{array}{l|l} \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx & -\cot x - x + C \\ \int \frac{(1 - \sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} dx & \arcsin x - \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C \\ \int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx & \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + x + C \\ \int \cot^2 x dx & \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 4x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2x^2 - 4x + C \\ \int \sin^2 x dx & \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{array}$$

הערה: צריך להשתמש בנוסחאות אלגבריות כגון:

$$\frac{a - b + c}{z} = \frac{a}{z} - \frac{b}{z} + \frac{c}{z}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

לוח האינטגרלים היסודיים הוא לא סופי וניתן להמשיכה. כל סטודנט יכול להוסיף

אינטגרלים לפי דעתו. למשל כדאי לזכור אינטגרלים:

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$$

$$\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

דוגמאות

(א)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C$$

(ב)

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x} dx = \int e^{2x} dx - \int e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + e^{-x} + C$$

(ג)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 4x} dx &= \int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin 2x} \end{aligned}$$

משתמשים באינטגרלים $\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{\cos x}$ מהלוח ובתכונה 3 של אינטגרציה.

נקבל

$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{2x}{2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln |\tan x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

אזי התשובה הסופית לתרגיל ג' היא:

$$\int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 4x} dx = \frac{1}{4} \ln |\tan x| + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

הערה: אם אחרי אינטגרציה נקבל סכום (הפרש) של לוגריתמים, ניתן לאחד

אותם ללוגריתם אחד. לדוגמא:

$$\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \cot x \right) dx = \ln |(x^2-1) \sin x| + C$$

תרגילים:

$$\begin{array}{l|l} \int \left(\sin \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx & \frac{1}{3} (e^{3x} - e^{-3x}) + 3(e^x - e^{-x}) + C \\ \int \left(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \right)^2 dx & \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2x + C \\ \int \frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} dx & \ln |x^2 + 5x + 6| + C \\ \int (e^x + e^{-x})^3 dx & 2 \left(\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right) + C \\ \int \frac{2x + 5}{(x + 2)(x + 3)} dx & x + 2 \cos \frac{x}{2} + C \end{array}$$