

### שיטות אינטגרציה 3

(5) שימוש בפעולות אלגבריות מיוחדות

אינטגרציה מיידידת פשוטה כשיטת אינטגרציה, אבל הפעולות האלגבריות הנחוצות עלולות להיות לפעמים די טריקיות. בפרק הזה נסתכל על כמה פעולות כאלו, החשובות ביותר באינטגרציה.

(A) הוצאת חלק שלם משבר אלגברי

בפעולה זו משתמשים כאשר מעלת המונה גדולה או שווה למעלת המכנה.

דוגמאות:

(א)

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+3}{2x-1} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x-1) + \frac{5}{2} + 3}{2x-1} dx = \frac{5}{2} \int dx + \frac{11}{2} \int \frac{dx}{2x-1} \\ &= \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} \ln|2x-1| + C\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4}{4x+3} dx &= \int \frac{\frac{1}{4}x(4x+3) - \frac{3}{4}x + 4}{4x+3} dx = \frac{1}{4} \int x dx + \\ &+ \int \frac{-\frac{3}{4}x + 4}{4x+3} dx = \frac{x^2}{8} + \int \frac{-\frac{3}{16}(4x+3) + \frac{9}{16} + 4}{4x+3} dx = \\ &= \frac{x^2}{8} - \frac{3}{16}x + \frac{73}{64} \ln|4x+3| + C\end{aligned}$$

(ג)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x+1} dx &= \int \frac{x^3(x+1) - x^3}{x+1} dx = \int x^3 dx - \int \frac{x^2(x+1) - x^2}{x+1} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \int x^2 dx + \int \frac{x(x+1) - x}{x+1} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \int x dx - \int \frac{x}{x+1} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

הערה: קיימת שיטה כללית לחלוקת פולינום בפולינום. אנחנו לא לומדים אותה אבל סטודנט השולט בשיטה הזו מורשה להשתמש בה.

תרגיל: לחשב  $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$  ,  $\int \frac{x^3-x}{x+2} dx$

(B) הוצאת ריבוע מדוייק מתלת-איבר ריבועי

האינטגרלים  $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$ ,  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  מלוח

האינטגרלים היסודיים כוללים ביטויים  $x^2 \pm a^2$  או  $a^2 - x^2$ . נראה איך להשתמש בהם כאשר הביטויים האלה מוחלפים בביטוי  $Ax^2 + Bx + D$ .

דוגמאות:

(א) 
$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x+2}{3} + C$$

(ב) 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x - \frac{5}{2})^2 + 6 - \frac{25}{4}} = \int \frac{dx}{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{(x - \frac{5}{2}) - \frac{1}{2}}{(x - \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$$

(ג) קל לראות ש-  $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$  . אזי

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)} + C$$

(ד)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x - 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - \frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - \frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x+1 + \sqrt{(x+1)^2 - \frac{5}{2}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - \frac{3}{2}} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{2} + C \quad (ה)$$

הוצאת נגזרת (C)

נזכור כי כל נוסחה של גזירה מולידה נוסחה לאינטגרציה.

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \implies \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \implies \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

דוגמאות:

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C \quad (א)$$

$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx = \int \frac{(x+\sin x)'}{x+\sin x} dx = \ln |x+\sin x| + C \quad (ב)$$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x^2-1}} dx = 3\sqrt{x^2-1} + C \quad (ג)$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\sqrt{\cos x}} dx = -2\sqrt{\cos x} + C \quad (ד)$$

$$\int \frac{Mx+N}{Ax^2+Bx+D} dx, \int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+D}} dx \quad \text{לחישוב האינטגרלים}$$

ניתן להוציא את הנגזרת  $(Ax^2+Bx+D)' = 2Ax+B$  מן המונה  $Mx+N$ :

$$Mx+N = \frac{M}{2A}(2Ax+B) + N - \frac{MB}{2A}$$

דוגמאות:

(א)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2-2x+5} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2) + 2 + 3}{x^2-2x+5} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(x^2-2x+5)'}{x^2-2x+5} dx + 5 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2-2x+5| + \frac{5}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int \frac{-\frac{1}{2}(4-2x) + 2}{\sqrt{4x-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{(4x-x^2)'}{\sqrt{4x-x^2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \\ &= -\sqrt{4x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x-2}{2} + C\end{aligned}$$

תרגילים:

$$\begin{array}{l} \int \frac{6x-5}{x^2-4x+3} dx \\ \int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 \ln|x^2-4x+3| + \frac{7}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C \\ -\sqrt{x^2+x+1} + \frac{5}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C \end{array} \right.$$