שיטות אינטגרציה 4

(6) שיטה 3: אינטגרציה בחלקים

לא קשה לגזור מכפלה של שתי פונקציות נתונות, אך לא ידוע איך לקבל מכפלה הנחוצה אחרי גזירה כדי שאפשר יהיה לחזור לפונקציה הקדומה. זאת הסיבה שלא קיימת נוסחה כללית לאינטגרציה של מכפלה. כמסקנה מגזירה ניתן לקבל רק:

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Rightarrow u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

קיבלנו נוסחה ההופכת אינטגרל של מכפלה אחת לאינטגרל של מכפלה אחרת. נוסחה זו מועילה רק כאשר האינטגרל החדש יותר פשוט מהאינטגרל הנתון. במעבר הזה גורם אחד $u(x)$ הופך לנגזרתו ואילו גורם שני $v'(x)$ הופך לפונקציה קדומה שלו. שיטה זו נקראת "אינטגרציה בחלקים".

דוגמא:

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right] = \frac{x^3}{3}\,\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

לפעמים צריך לחזור על אינטגרציה בחלקים מספר פעמים.

דוגמא:

$$\int x^3 \cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x^3 \sin x - 3\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = x^3 \sin x - 3\Big[-x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x\Big]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x^3 \sin x - 3\Big[-x^2\cos x + 2\big(x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x\big)\Big]$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C$$

כבר בדוגמאות האלה ניתן לראות כי הפעולה העיקרית היא הגזירה. בדוגמא הראשונה $\ln x$ אחרי גזירה הופך ל- $\frac{1}{x}$ וכל הביטוי נעשה פשוט. בדוגמא שניה כל גזירה מורידה מעריך של x עד שהוא נעלם.

<u>תרגילים</u>

א) סיים אינטגרציה לפי התחלה נתונה:

$$\int x^2 \arctan x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|c} u = \arctan x & u' = \dots \\ v' = x^2 & v = \dots \end{array}\right] = \dots$$

$$\int x e^{-x} \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|c} u = x & u' = \dots \\ v' = e^{-x} & v = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = \dots \end{array}\right] = \dots$$

$$\int \ln(x^2+1) \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|c} u = \ln(x^2+1) & u' = \dots \\ v' = 1 & v = \dots \end{array}\right] = \dots$$

ב) בחר $u(x)$ ו- $v(x)$ בעצמך וחשב אינטגרלים:

$$\int \arctan x \,\mathrm{d}x \quad , \quad \int x^2 \sin 3x \,\mathrm{d}x \quad , \quad \int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

לפעמים אינטגרציה בחלקים נפגשת כחלק של אינטגרציה מלאכותית ומסובכת.
נביא דוגמא אחד עם אינטגרל חשוב מאוד בשימושים

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

נחשב בנפרד את האינטגרל האחרון:

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+a^2)} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\,\arctan\frac{x}{a} + C$$

(חישבנו אינטגרל $v(x)=\int v'(x)\,\mathrm{d}x$ בניחוש, בדוק אותו בעצמך ע"י גזירה)
בחזרה לאינטגרל מקורי נקבל

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\Big(-\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\ \arctan\frac{x}{a}\Big) + C$$

$$= \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\ \arctan\frac{x}{a} + C$$

בטריק אחר משתמשים לחישוב האינטגרלים $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$

<u>דוגמא:</u>

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} u=e^{2x} & u'=2e^{2x} \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{array}\right] =$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} u=e^{2x} & u'=2e^{2x} \\ v'=\cos x & v=\sin x \end{array}\right]$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\Big(e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x\Big)$$

נסמן את האינטגרל המבוקש ב- I . אזי נקבל

$$I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4I$$

$$5I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x$$

$$I = \frac{1}{5}\big(-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x\big)$$

והתשובה הסופית היא

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\big(-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x\big) + C$$