שיטות אינטגרציה 5

(7) שיטה 4: אינטגרציה בהצבה

כמו למכפלות ומנות, לאינטגרצית פונקציה מורכבת אין נוסחה כללית וניתן להשתמש רק בתוצאות של גזירה. נניח ש- $F'(t) = f(t)$.

אזי במקרה $t = \varphi(x)$ נקבל

$$\left[F(\varphi(x))\right]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

$$\Longrightarrow \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C\ .$$

זאת אומרת, יש אפשרות לעשות אינטגרציה של פונקציה מורכבת רק אם הפונקציה הזו מוכפלת בנגזרת של פונקציה פנימית. למעשה זה נראה כהצבת האות t במקום פונקציה פנימית $\varphi(x)$ ו- $\mathrm{d}t$ במקום $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. כתוצאה מכך פונקציה מורכבת הופכת לפונקציה פשוטה הניתנת לאינטגרציה יותר קלה. עלינו רק לא לשכוח לחזור למשתנה המקורי x ע"י החלפה הפוכה $t = \varphi(x)$.

דוגמאות

א)

$$\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\sin x = t\\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right] = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

ב)

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}x^2+1 = t\\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right] = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\,(x^2+1)^{3/2} + C$$

ג)

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\arctan x = t\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}t\end{array}\right] = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\arctan^3 x + C$$

ד)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\mathrm{d}x}{e^{2x}+1} = \left[\begin{array}{c}e^x = t\\ e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= \arctan t + C = \arctan(e^x) + C$$

לא בכל אינטגרלים הנגזרת $\varphi'(x)$ ברורה מייד, ולפעמים צריך להוציא אותה מביטוי נתון בצורה נכונה.

<u>דוגמאות (המשך)</u>

ה)

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(1+x^4)^2} = \begin{bmatrix} 1+x^4 = t \\ 4x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4(1+x^4)} + C$$

ו)

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$$

הערה: בשתי דוגמאות אחרונות רואים אותו ביטוי $1+x^4$, אבל ניתן להציב t במקומו רק בתרגיל ה' כי רק שם יש נגזרת $(1+x^4)' = 4x^3$ (חוסר מקדם קבוע 4 לא גורם בעיות). בתרגיל אחרון יש נגזרת רק לביטוי x^2 וזה מגדיר את ההצבה.

נדגיש כי ניתן להחליף ב-t רק פונקציה $\varphi(x)$ אחת ואת כל הפונקציות האחרות, המפריעות לאינטגרציה, צריך לבטא דרך $\varphi(x)$.

<u>דוגמאות</u>

א)

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\int(1-t^2)t^2\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{3}\,\cos^3 x + \frac{1}{5}\,\cos^5 x + C$$

האם אנחנו יכולים לעשות בתרגיל הזה הצבה אחרת $\sin x = t$?

נקבל:

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int t^3\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

הגענו לאינטגרל בהרבה יותר קשה מקודם.

מסקנה: כדי לחשב $\int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x$ צריך להציב t במקום אותה פונקציה $\sin x$ או $\cos x$ שלא נקבל שורש במקום פונקציה שניה. אם למשל מעריך m אי-זוגי, לוקחים $t=\cos x$, ואם n אי-זוגי לוקחים $t=\sin x$. לשני מעריכים אי-זוגיים לא אכפת איזו פונקציה לסמן ב- t ואילו לשני מעריכים זוגיים אין הצבה טובה בכלל. במקרה זה יש להשתמש בנוסחאות הטריגונומטריות

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\,\sin 2x$$

ב)

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot (\sin x \cos x)^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \,\mathrm{d}x$$

לאינטגרל ראשון:

$$\int \sin^2 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

לאינטגרל שני:

$$\int \sin^2 2x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int t^2 \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{6}\,t^3 + C = \frac{1}{6}\,\sin^3 2x + C$$

והתשובה הסופית היא

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\,\sin^3 2x + C$$

תרגילים:

א) סיים אינטגרציה לפי התחלה נתונה:

$$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \ldots$$

$$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \ldots$$

ב) חשב אינטגרלים הבאים ע"י הצבה מתאימה:

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(4-\ln^2 x)}$	$\displaystyle -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$
$\displaystyle\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle \frac{1}{2}\left(\arctan^2 x+\ln(1+x^2)\right)+C$
$\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle \frac{1}{3}\ln(x^3+\sqrt{1+x^6})+C$
$\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle -\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2+C$
$\displaystyle\int \frac{\arctan x+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle \frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right\rvert+C$
$\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}$	$\displaystyle \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$