שיטות אינטגרציה 6

(8) <u>אינטגרציה של ביטוים טריגונומטריים</u>

כידוע, ניתן לבטא כל פונקציות טריגונומטריות באמצעות פונקציה אחת כלשהי. לכן לאינטגרציה של ביטוים טריגונומטריים מתאימה כל הצבה $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\tan x = t$ הנותנת אינטגרל פשוט ביותר. נזכיר נוסחאות כאלה:

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2}\,,\ \tan x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,,\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = t \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-t^2}\,,\ \tan x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,,\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\tan x = t \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

רצוי לבחור הצבה שלא נותנת שורשים. זה אפשרי אם כל הפונקציות הכוללות שורשים הן בעלות חזקה זוגית.

<u>דוגמאות:</u>

א)

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{1-t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \mathrm{d}t = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

ב)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \tan x = t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

ג)

$$\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \tan x = t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x) + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

ד)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^4 x} = \begin{bmatrix} \tan x = t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cot x + 2\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

קיימת הצבה טריגונומטרית אוניברסלית שלא נותנת שורשים בכלל:

$$\tan\frac{x}{2} = t \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,,\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\; \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

לצערינו ההצבה הזו בדרך כלל מביאה לאינטגרלים מסובכים, לכן משתמשים בה רק כאשר הצבות אחרות אינן מתאימות.

<u>דוגמא:</u>

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} = \left[\;\tan\tfrac{x}{2} = t\;\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{2} + C$$

<u>תרגילים:</u>

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$
$\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{3}\tan^3 x + C$
$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$	$2\arctan\left(\tan\frac{x}{2} + 2\right) + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x + 2\cos x + 3}$	$-\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C$
$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{4}\sin^4 x - \sin^2 x + \ln\|\sin x\| + C$

(9) <u>שיטה 5:</u> <u>החלפת משתנה האינטגרציה</u>

הנוסחה לגזירה של פונקציה מורכבת ניתנת לשימוש בצורה אחרת: להחליף x בפונקציה $\varphi(t)$. באותו זמן $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ כך ש-

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

במבט ראשון האינטגרל החדש נראה יותר מסובך מהאינטגרל הנתון. אבל באינטגרציה הוא עשוי להתברר כקל יותר.

<u>דוגמאות</u>

א)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \begin{bmatrix} x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})\ \mathrm{d}t = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$$

ב)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\ \sin 2t + C$$

$$= \frac{1}{2}\ \arcsin x + \frac{1}{2}\ \sin t\cos t + C$$

$$= \frac{1}{2}\ \arcsin x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + C$$

ג)

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = a\tan t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{a\sqrt{1+\tan^2 t}}{a\tan t}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= a\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos^2 t} = \left[\begin{array}{c}\cos t = z\\ -\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}z\end{array}\right] = -a\int \frac{\mathrm{d}z}{(1-z^2)z^2}$$

$$= a\int\left(\frac{1}{z^2-1} - \frac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{a}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + \frac{a}{z} + C$$

$$= \frac{a}{2}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right| + \frac{a}{\cos t} + C \qquad \boxed{\cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}}$$

$$= \frac{a}{2}\ln\left|\frac{\cos\left(\arctan\frac{x}{a}\right) - 1}{\cos\left(\arctan\frac{x}{a}\right) + 1}\right| + \frac{a}{\cos\left(\arctan\frac{x}{a}\right)} + C$$

$$= \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a} + \sqrt{x^2+a^2} + C$$