שיטות אינטגרציה 7

(10) <u>אינטגרציה של פונקציות רציונליות</u>

לפי ההגדרה, פונקציה רציונלית היא מנה של שני פולינומים (שבר אלגברי)

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

כאשר m, n מסמנים מעלות של הפולינומים. תיאורטית כל פונקציה רציונלית ניתנת לאינטגרציה עד הסוף והתשובה כוללת שוב פונקציות רציונליות, לוגריתמים וארק-טנגנסים (או חלק מהם). אבל החישובים המובילים לפתרון יכולים להיות ארוכים ומסובכים. לכן נלמד כללי אינטגרציה בצורה כללית אך נתרגל אותם רק במקרים פשוטים.

<u>שלבי אינטגרציה:</u>

א) להוציא "חלק שלם", ז.א. להציג $R(x)$ בצורה

$$R(x) = S_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)} \quad , \quad k < n$$

כאשר $m \geq n$. S_{m-n} הוא פולינום ממעלה $m-n$ הנקרא "חלק שלם" של פונקציה רציונלית. אם $m < n$ אז $S_{m-n} = 0$. בהמשך נחשוב שעבודה הזו כבר נעשתה ו- $m < n$ מלכתחילה.

ב) לפרק את הפולינום במכנה $Q_n(x)$ לגורמים הכי פשוטים. ניתן להוכיח שכל פולינום אפשר לפרק לגורמים מצורה $x-a$ או x^2+px+q (תלת-איבר בלי שורשים ממשיים). לגורמים אלה יכולה להיות חזקה חיצונית כמו $(x-a)^k$ והמעריך k נקרא "ריבוי" של הגורם. בסופו של דבר נקבל הצגה:

$$Q_n(x) = A(x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$$

כדאי לבדוק את המעריכים: $n = k_1 + \cdots + k_r + 2(m_1 + \cdots + m_s)$

אם הריבוי שווה לאחד אז הגורם נקרא "פשוט".

ג) לפרק שבר אלגברי $R(x)$ לסכום של שברים פשוטים, כלומר, לשברים שבמכנה להם יש רק גורם פשוט אחד (עם ריבוי או לא). המונה של כל שבר פשוט הוא מספר לגורמים מסוג $(x-a)^k$, או ביטוי מהצורה $Mx+N$ לגורמים מסוג $(x^2+px+q)^m$.

דוגמאות:

א)

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2+4}$$

ב)

$$\frac{2x+5}{x^3+1}=\frac{2x+5}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}$$

ג)

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{x+2}$$

ד)

$$\frac{2x^3+x-5}{x(x^2+2x+5)^3}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+2x+5)^3}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+5)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+2x+5}$$

לפירוק מלא צריך להשב את המספרים $A, B, C \ldots$ שעדיין "לא נקבעו". דווקא עבודה זו היא הארוכה והקשה ביותר בכל תהליך האינטגרציה ומתבצעת באמצעות שיטה הנקראת שיטת המקדמים הלא נקבעים. תמצית השיטה הוא לחבר את כל השברים הפשוטים לשבר אחד ולהשוות את המונה של השבר שנתקבל עם המונה של השבר הנתון. לדוגמא א' מקבלים:

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Mx+N)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

המכנים של השברים שווים, לכן גם המונים חייבים להיות שווים:

$$x^2=A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Mx+N)(x-2)(x+2)$$

והשוויון מתקיים זהותית, לכל x. נציב לשני צדדיו קודם $x=2$, אחר כך $x=-2$:

$$\begin{array}{r|l} x=2 & 4=32A \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{8} \\ x=-2 & 4=-32B \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{8} \end{array}$$

בחירת המספרים $-2,2$ ברורה כי בצד ימין נשאר רק מקדם לא נקבע אחד. למציאת מקדם נוסף מועיל להציב $x=0$:

$$0=8A-8B-4N \ \Rightarrow N=\frac{1}{2}$$

למציאת המקדם האחרון M נשתמש באפשרות אחרת - להשוות מקדמים לייד אותה חזקה בצד שמאל ובצד ימין. הכי קל לקחת חזקה x^3:

$$0=A+B+M \ \Rightarrow M=0$$

כתוצאה מקבלים

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{\frac{1}{8}}{x-2}-\frac{\frac{1}{8}}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+4}$$

<u>תרגיל:</u> מצא מקדמים A,B,D בדוגמא ב'. אחרי כל החישובים אתה צריך לקבל $A-B+D=6$, בדוק.

לפעמים צריך להשוות מקדמים בכל (או כמעט כל) החזקות:

<u>דוגמא:</u>

$$\frac{1}{x^5+x^3}=\frac{1}{x^3(x^2+1)}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$1=(x^2+1)(A+Bx+Cx^2)+(Dx+E)x^3$$

בהצבת $x=0$ מייד נקבל $A=1$. אבל למקדמים אחרים צריך להשוות חזקות:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0 = C + D \\ x^3 & 0 = B + E \quad \Rightarrow B = 0\,,\ C = -1\,,\ D = 1\,,\ E = 0 \\ x^2 & 0 = A + C \\ x & 0 = B \end{array}$$

והתשובה היא

$$\frac{1}{x^5 + x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

פירוק $R(x)$ לשברים פשוטים מאפשר להביא $\int R(x)\,\mathrm{d}x$ לסכום אינטגרלים של שברים פשוטים שבהרבה יותר קל. לדוגמאות קודמות נקבל:

$$\int \frac{x^2}{x^4-16}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$$
$$= \frac{1}{8}\ln|x-2| - \frac{1}{8}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5+x^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = -\frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

בדוגמאות הבאות מגיעים לאינטגרציה של פונקציה רציונלית אחרי הצבה מתאימה.

א)

$$\int \frac{\sqrt[8]{x}}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = t^8 \\ \mathrm{d}x = 8t^7\mathrm{d}t \end{bmatrix} = 8\int \frac{t^8\,\mathrm{d}t}{t^8 - t^4} = 8\int \frac{t^4}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$$
$$= 8\int (1 + \frac{1}{t^4-1})\,\mathrm{d}t = 8t + 8\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4-1} \quad .$$

$$\frac{1}{t^4-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

בדוק בעצמך כי $A = \frac{1}{4}\,,\ B = -\frac{1}{4}\,,\ C = 0\,,\ D = -\frac{1}{2}$ כך ש-

$$\frac{1}{t^4-1}=\frac{1}{4(t-1)}-\frac{1}{4(t+1)}-\frac{1}{2(t^2+1)} \implies$$

$$8\int\frac{\mathrm{d}t}{t^4-1}=2\ln|t-1|-2\ln|t+1|-4\arctan t+C$$

ואחרי החלפה הפוכה $t=\sqrt[8]{x}$ נקבל

$$\int\frac{\sqrt[8]{x}}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=8\sqrt[8]{x}+2\ln|\sqrt[8]{x}-1|-2\ln|\sqrt[8]{x}+1|-4\arctan\sqrt[8]{x}+C$$

ב)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x}=\left[\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right]=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$$

$$\frac{1}{(1-t^2)^2}=\frac{A}{(1-t)^2}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{(1+t)^2}+\frac{D}{1+t}$$

בדוק בעצמך כי $A=B=C=D=\frac{1}{4}$ כך ש-

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$=\frac{1}{4(1-t)}-\frac{1}{4}\ln|1-t|-\frac{1}{4(1+t)}+\frac{1}{4}\ln|1+t|+C$$

$$=\frac{t}{2(1-t^2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C \implies$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$