

שאלת אנטגרל של פונקציה עם מעריך רציונלי

שאלה

- א. נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x) : f'(x) = \frac{6x}{4\sqrt{x^2+t}}$. הוא פרמטר t .
המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ מאונך לישר $\sqrt{5}x + 18y = 0$.
הערך של הפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון שלה הוא 10 .
מצא את הפונקציה $f(x)$.

פתרון

נסמן את הישר המשיק ב- k ואת הישר הנתון ב- l .

$$\sqrt{5}x + 18y = 0 \Rightarrow m_l = -\frac{\sqrt{5}}{18}, l \perp k \Rightarrow m_k = \frac{18}{\sqrt{5}} = f'(3)$$

$$f'(x) = \frac{6x}{4\sqrt{x^2+t}} \Rightarrow f'(3) = \frac{18}{4\sqrt{9+t}} = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt[4]{9+t} = \sqrt{5} \quad /(\)^4$$

$$\Rightarrow 9+t = 25 \Rightarrow t = 16$$

$$\sqrt[4]{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{5} \rightarrow \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \quad (\checkmark) \text{ בדיקה:}$$

$$f'(x) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{שיעור } x \text{ של נקודת הקיצון}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{6x}{4\sqrt{x^2+16}} dx = 3 \int \frac{2x}{4\sqrt{x^2+16}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2 \int u^{-0.5} du$$

$$f(x) = 3 \cdot \frac{u^{0.75}}{0.75} + c = 4 \sqrt[4]{u^3} + c = 4 \sqrt[4]{(x^2+16)^3} + c$$

$$f(0) = 4 \sqrt[4]{16^3} + c = 4 \cdot (\sqrt[4]{16})^3 + c = 4 \cdot 2^3 + c = 32 + c = 10 \Rightarrow c = -22$$

נתון

$$\Rightarrow f(x) = 4 \sqrt[4]{(x^2+16)^3} - 22$$

(*) הצבה:

$$x^2 + 16 = u \Rightarrow d(x^2 + 16) = du \Rightarrow 2x dx = du$$