

שאלה באינטגרלים

שאלה

גרף הפרבולה $y = x^2 - 1$ חותך את ציר ה- y בנקודה C , והמשיק לגרף הפרבולה בנקודה A חותך את ציר ה- y בנקודה B . גרף הפרבולה מחלק את המשולש ABC לשני חלקים. חשבו את היחס בין שטח חלק המשולש שמעל גרף הפרבולה לשטח חלק המשולש שמתחת לגרף הפרבולה.

פתרון

שלב הפתרון יהיו: חישוב משוואת המשיק, מציאת השיעורים של קודקודי המשולש, חישוב שטח המשולש, חישוב שטח אחד מחלקי המשולש, ולבסוף חישוב היחס.

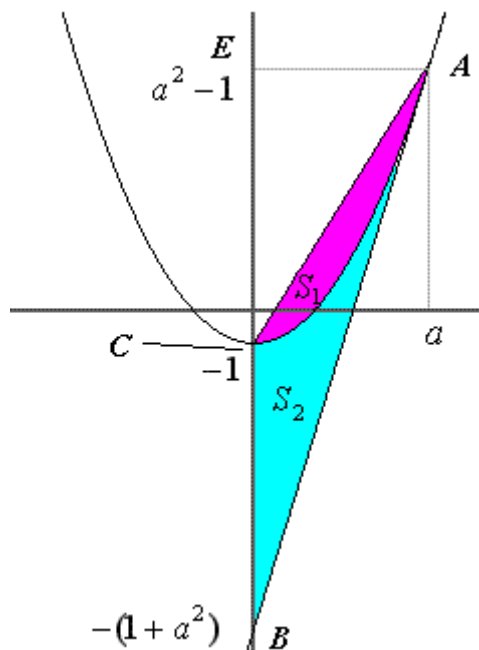
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- a . נקודה זו נמצאת על גרף הפונקציה, ולכן שיעור ה- y של A הוא $a^2 - 1$. שיפוע המשיק שווה לערך נגזרת הפונקציה בנקודת ההשקה. כיוון ש- $y' = 2x$ נקבל כי שיפוע המשיק הוא $2a$, ולכן משוואת המשיק תהיה:

$$y - (a^2 - 1) = 2a(x - a)$$

$$y - a^2 + 1 = 2ax - 2a^2$$

$$y = 2ax - (1 + a^2)$$

מכאן נקבל כי שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- y הם B , $y = -(1 + a^2)$. על ידי הצבת $x = 0$ הפונקציה נקבל כי שיעור ה- y של הנקודה C בה חותך גרף הפרבולה את ציר ה- y הוא -1 .



כעת נוכל לחשב את שטח המשולש. נתייחס אל הקטע BC כאל בסיס המשולש. אורכו הוא

$$BC = (-1) - [-(1+a^2)] = a^2$$

גובה המשולש הוא $AE = a$ ולכן שטח המשולש הוא

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{2}$$

כעת נחשב את שטח חלקו התחתון של המשולש S_2 (מופיע בשרטוט בצבע תכלת) על ידי אינטגרציה:

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^a [(x^2 - 1) - (2ax - 1 - a^2)] dx = \\ &= \int_0^a (x^2 - 2ax - a^2) dx = \int_0^a (x - a)^2 dx = \\ &= \frac{(x - a)^3}{3} \Big|_0^a = \frac{(a - a)^3}{3} - \frac{(0 - a)^3}{3} = \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

ולכן שטח החלק העליון של המשולש S_1 (מופיע בשרטוט בצבע ורוד) הוא:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} - S_2 = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

היחס המבוקש הוא לכן

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{1}{2}$$