

## עוד שתי שאלות בחשיבה הסתברותית

### שאלה 1

להלן נתוני סקר אודות הצלחה ואי-הצלחה

בלימודי המתמטיקה שנערך בקבוצה של 450 בנים ובנות:

| לא מצליחים | מצליחים |      |
|------------|---------|------|
| 100        | 100     | בנים |
| 100        | 150     | בנות |

א. הראה ע"י חישוב פרופורציות שיש קשר סטטיסטי בין מין התלמיד להצלחתו במתמטיקה.

תאר במילים ומספרים את משמעות הקשר.

ב. הועלתה טענה שמידת ההצלחה קשורה בעזרה שהתלמיד קיבל בפורום למתמטיקה באינטרנט.

בדקו את הקשר בין שימוש בפורום לבין מין התלמיד, ובין שימוש בפורום לבין הצלחה.

קיבלו את התוצאות הבאות:

| לא נעזרים בפורום | נעזרים בפורום |      |
|------------------|---------------|------|
| 110              | 90            | בנים |
| 90               | 160           | בנות |

| לא נעזרים בפורום | נעזרים בפורום |            |
|------------------|---------------|------------|
| 30               | 220           | מצליחים    |
| 170              | 30            | לא מצליחים |

1. האם קיים קשר סטטיסטי בין העזרות בפורום למין התלמיד? מהי משמעות הקשר?

2. האם קיים קשר סטטיסטי בין העזרות בפורום להצלחה? מהי משמעות הקשר?

## פתרון:

נסמן:  $B$  - קבוצת הבנים,  $\bar{B}$  - קבוצת הבנות (boy - B)

$V$  - קבוצת המצליחים,  $\bar{V}$  - קבוצת הנכשלים (victory - V)

$F$  - קבוצת הנעזרים בפורום,  $\bar{F}$  - קבוצת אלו שאינם נעזרים בפורום (forum - F)

א. נרשום את טבלת השכיחויות במתאימה:

|           | V                               | $\bar{V}$                       | $\Sigma$                        |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| B         | $\frac{100}{450} = \frac{2}{9}$ | $\frac{100}{450} = \frac{2}{9}$ | $\frac{200}{450} = \frac{4}{9}$ |
| $\bar{B}$ | $\frac{150}{450} = \frac{1}{3}$ | $\frac{100}{450} = \frac{2}{9}$ | $\frac{250}{450} = \frac{5}{9}$ |
| $\Sigma$  | $\frac{250}{450} = \frac{5}{9}$ | $\frac{200}{450} = \frac{4}{9}$ | 1                               |

$$P(V/B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}, \quad P(V/\bar{B}) = \frac{P(V \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3} : \frac{5}{9} = \frac{3}{5} \Rightarrow P(V/\bar{B}) > P(V/B)$$

מסקנה: יש קשר סטטיסטי בין מין התלמיד להצלחה במתמטיקה.

משמעות הקשר: פרופורצית המצליחים מבין הבנות גבוהה יותר

מפרופורצית המצליחים מבין הבנים: 60% לעומת 50%.

ב. נרשום את טבלאות הפרופורציות המתאימות:

|           | F                                 | $\bar{F}$                         | $\Sigma$                        |
|-----------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| B         | $\frac{90}{450} = \frac{1}{5}$    | $\frac{110}{450} = \frac{11}{45}$ | $\frac{200}{450} = \frac{4}{9}$ |
| $\bar{B}$ | $\frac{160}{450} = \frac{16}{45}$ | $\frac{90}{450} = \frac{1}{5}$    | $\frac{250}{450} = \frac{5}{9}$ |
| $\Sigma$  | $\frac{250}{450} = \frac{5}{9}$   | $\frac{200}{450} = \frac{4}{9}$   | 1                               |

|           | F                                 | $\bar{F}$                         | $\Sigma$                        |
|-----------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| V         | $\frac{220}{450} = \frac{22}{45}$ | $\frac{30}{450} = \frac{1}{15}$   | $\frac{250}{450} = \frac{5}{9}$ |
| $\bar{V}$ | $\frac{30}{450} = \frac{1}{15}$   | $\frac{170}{450} = \frac{17}{45}$ | $\frac{200}{450} = \frac{4}{9}$ |
| $\Sigma$  | $\frac{250}{450} = \frac{5}{9}$   | $\frac{200}{450} = \frac{4}{9}$   | 1                               |

1.

$$P(F/B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{5} : \frac{4}{9} = \frac{9}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20} = 0.45$$

$$P(F/\bar{B}) = \frac{P(F \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{16}{45}}{\frac{2}{9}} = \frac{16}{45} : \frac{5}{9} = \frac{16 \cdot 9}{45 \cdot 5} = \frac{16}{5 \cdot 5} = \frac{16}{25} = 0.64 \Rightarrow P(F/\bar{B}) > P(F/B)$$

מסקנה: יש קשר סטטיסטי בין שימוש בפורום לבין מין התלמיד.

משמעות הקשר: פרופורצית המשתמשים בפורום מבין הבנות גבוהה יותר

מפרופורצית המשתמשים בפורום מבין הבנים: 64% לעומת 45%.

2.

$$P(V/F) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{22}{45}}{\frac{2}{9}} = \frac{22}{45} : \frac{5}{9} = \frac{22 \cdot 9}{45 \cdot 5} = \frac{22}{5 \cdot 5} = \frac{22}{25} = 0.88$$

$$P(V/\bar{F}) = \frac{P(V \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{15} : \frac{4}{9} = \frac{9}{15 \cdot 4} = \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20} = 0.15 \Rightarrow P(V/F) > P(V/\bar{F})$$

מסקנה: יש קשר סטטיסטי בין הצלחה לבין השתתפות בפורום.

משמעות הקשר: פרופורצית המצליחים מבין המשתתפים בפורום גבוהה יותר

מפרופורצית המצליחים מבין אלו שלא השתתפו בפורום: 88% לעומת 15%.

## שאלה 2

באוניברסיטה מסוימת בדקו אם קיים קשר בין קבלה לאוניברסיטה למקום לידתו של המועמד. התקבלו התוצאות הבאות:

350 מועמדים התקבלו ללימודים באוניברסיטה, ו-150 לא התקבלו.

64% מהמועמדים התקבלו ללימודים והם ילידי הארץ.

24% מהמועמדים לא התקבלו ללימודים והם עולים חדשים.

א. הצג את הנתונים בטבלה דו-מימדית מתאימה.

ב. מהי פרופורצית המועמדים שהתקבלו מבין ילידי הארץ?

ג. מהי פרופורצית התלמידים שהתקבלו ללימודים מבין העולים?

ד. האם קיים קשר סטטיסטי בין קבלה לאוניברסיטה לבין מקום לידתו של המועמד?

מהי משמעות הקשר? הראה ע"י חישוב מתאים.

מאוחר יותר התברר שחלק מהמועמדים למדו בקורס הכנה לאוניברסיטה.

ההתפלגות בין לימודים בקורס לבין קבלה לאוניברסיטה:

| סה"כ | לא התקבלו | התקבלו |               |
|------|-----------|--------|---------------|
| 250  | 50        | 200    | למדו בקורס    |
| 250  | 100       | 150    | לא למדו בקורס |
| 500  | 150       | 350    | סה"כ          |

ההתפלגות בין לימודים בקורס לבין מקום הלידה:

| סה"כ | לא למדו בקורס | למדו בקורס |           |
|------|---------------|------------|-----------|
| 320  | 140           | 180        | יליד הארץ |
| 180  | 110           | 70         | עולים     |
| 500  | 250           | 250        | סה"כ      |

הועלתה טענה ששיעור המתקבלים לאוניברסיטה של ילידי הארץ גדול יותר מזה של העולים

בגלל הלימוד בקורס ההכנה. כדי לבדוק את הטענה, חילקו את המועמדים לשתי קבוצות:

אלו שעברו את קורס ההכנה, ואלו שלא עברו אותו. התקבלו התוצאות הבאות:

הקבוצה שעברה את קורס ההכנה:

| סה"כ | לא התקבלו | התקבלו |           |
|------|-----------|--------|-----------|
| 220  | 40        | 180    | יליד הארץ |
| 30   | 15        | 15     | עולים     |
| 250  | 55        | 195    | סה"כ      |

הקבוצה שלא עברה את קורס ההכנה:

| סה"כ | לא התקבלו | התקבלו |           |
|------|-----------|--------|-----------|
| 100  | 40        | 60     | יליד הארץ |
| 150  | 85        | 65     | עולים     |
| 250  | 125       | 125    | סה"כ      |

ה. ע"פ שתי הטבלאות האחרונות: האם המסקנה של סעיף ד' משתנה? נמק.

## פתרון:

א. נסמן: A - קבוצת המועמדים שהתקבלו ללימודים, B - קבוצת המועמדים ילידי הארץ

$$\text{נתון: } N(A) = 350, N(\bar{A}) = 150, P(A \cap B) = 0.64, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.24$$

|           | A                      | $\bar{A}$              | $\Sigma$         |
|-----------|------------------------|------------------------|------------------|
| B         | $0.64 \cdot 500 = 320$ | $150 - 120 = 30$       | $320 + 30 = 350$ |
| $\bar{B}$ | $350 - 320 = 30$       | $0.24 \cdot 500 = 120$ | $30 + 120 = 150$ |
| $\Sigma$  | 350                    | 150                    | 500              |

ב.

$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{320}{350} \Rightarrow P(A/B) = \frac{32}{35} = 0.9143 = 91.43\%$$

ג.

$$P(A/\bar{B}) = \frac{N(A \cap \bar{B})}{N(\bar{B})} = \frac{30}{150} \Rightarrow P(A/\bar{B}) = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$$

ד. מסעיפים ב' ו-ג':  $P(A/B) > P(A/\bar{B})$

מסקנה: יש קשר סטטיסטי בין קבלה ללימודים לבין מקום הלידה

משמעות הקשר: שיעור המתקבלים ללימודים מבין ילידי הארץ גבוה יותר

משיעור המתקבלים ללימודים מבין העולים: 91.43% לעומת 20%.

ה. בקבוצה שעברה את קורס ההכנה:

$$P(A/K) = \frac{N(A \cap K)}{N(K)} = \frac{200}{250} = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$P(A/\bar{K}) = \frac{N(A \cap \bar{K})}{N(\bar{K})} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5} = 60\%$$

מסקנה: יש קשר סטטיסטי בין קבלה ללימודים להשתתפות בקורס ההכנה:

שיעור המתקבלים מבין אלו שעברו את הקורס גבוה יותר

משיעור המתקבלים מבין אלו שלא עברו את הקורס: 80% לעומת 60%.

$$P(K/B) = \frac{N(K \cap B)}{N(B)} = \frac{180}{320} = \frac{9}{16} = 0.5625 = 56.25\%$$

$$P(K/\bar{B}) = \frac{N(K \cap \bar{B})}{N(\bar{B})} = \frac{70}{180} = \frac{7}{18} = 0.3889 = 38.89\%$$

מסקנה: יש קשר סטטיסטי בין השתתפות בקורס ההכנה לבין מקום הלידה:

שיעור המשתתפים בקורס ההכנה מבין ילידי הארץ גבוה יותר

משיעור המשתתפים בקורס מבין העולים החדשים: 56.25% לעומת 38.89%.

בקבוצה שעברה את קורס ההכנה:

$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{180}{220} = \frac{9}{11} = 0.8182 = 81.82\%$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{N(A \cap \bar{B})}{N(B)} = \frac{15}{30} = 0.5 = 50\% \Rightarrow P(A/B) > P(A/\bar{B})$$

בקבוצה שלא עברה את קורס ההכנה:

$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 60\%$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{N(A \cap \bar{B})}{N(B)} = \frac{65}{150} = \frac{13}{30} = 0.4333 = 43.33\% \Rightarrow P(A/B) > P(A/\bar{B})$$

הקשר הסטטיסטי בכל אחת מהקבוצות נשמר באותו כיוון:  $P(A/B) > P(A/\bar{B})$

ולכן המסקנה של סעיף ד' אינה משתנה:

ליליד הארץ סיכוי גדול יותר להתקבל ללימודים באוניברסיטה מאשר לעולה חדש.

מקום הלידה יכול להיות קשר סיבתי אפשרי, אבל לא מוכרח.