עוד תרגול בוקטורים – שתי שאלות

שאלה 1

נתון מישור π שמשוואתו $2x+y-z+3=0$.

הנקודות $B(1,-2,m)$ ו־ $A(-1,-2,k)$ נמצאות במישור זה, והישר BG מאונך לו (למישור).

א. מצא את שיעורי הנקודה G, אם גם נתון כי $|\vec{BG}|=\sqrt{96}$, ושיעור x של הנקודה G הוא חיובי.

ב. דרך הנקודה G שאת שיעוריה מצאת בסעיף א, ודרך הנקודה $E(11,6,-17)$ עובר ישר l החותך את המישור π בנקודה F . הוכח כי הנקודות B , A ו־ F נמצאות על ישר אחד.

ג. מצא את המצב ההדדי בין הישר AF לציר x .

פתרון

א.

$B \in \pi \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 1+(-2)-m+3=0 \quad \Rightarrow \quad m=3 \quad \Rightarrow \quad B(1,-2,3)$

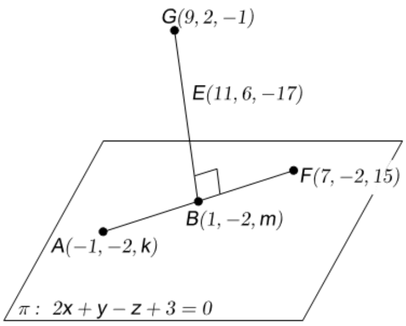
$h_\pi=(2,1,-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{BG:}\ \underline{x}=(1,-2,3)+t(2,1,-1)$

$G(1+2t\ ,\ -2+t\ ,\ 3-t) \quad \Rightarrow \quad \vec{BG}=(2t\ ,\ t\ ,\ -t)$

$|\vec{BG}|=\sqrt{4t^2+t^2+t^2}=\sqrt{96} \quad \Rightarrow \quad 6t^2=96$

$\Rightarrow \quad t^2=16 \quad \Rightarrow \quad t=\pm 4$

$x_G>0 \quad \Rightarrow \quad t=4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G(9\ ,\ 2\ ,\ -1)}$



ב.

$\underline{l:}\ \underline{x}=G+r\,\vec{GE}=(9,2,-1)+r(2,4,-16)=(9,2,-1)+r(1,2,-8)=(9+r\ ,\ 2+2r\ ,\ -1-8r)$

$\underline{F:}\ F\in l\ ,\ F\in\pi \quad \Rightarrow \quad 2(9+r)+(2+2r)-(-1-8r)+3=0$

$18+2r+2+2r+1+8r+3=0 \quad \Rightarrow \quad 12r=-24 \quad \Rightarrow \quad r=-2$

$r=-2 \quad \Rightarrow \quad \underline{F(7\ ,\ -2\ ,\ 15)}$

$A\in\pi \quad \Rightarrow \quad 2\cdot(-1)+(-2)-k+3=0 \quad \Rightarrow \quad -1-k=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1 \quad \Rightarrow \quad A(-1,-2,-1)$

$\vec{AF}=F-A=(7,-2,15)-(-1,-2,-1)=(8,0,16) \quad \Rightarrow$ וקטור הכיוון לאחר צמצום: $\underline{(1,0,2)}$

$\vec{AB}=B-A=(1,-2,3)-(-1,-2,-1)=(2,0,4) \quad \Rightarrow$ וקטור הכיוון לאחר צמצום: $\underline{(1,0,2)}$

$\vec{AF}$ ו־ $\vec{AB}$ יוצאים מאותה נקודה (A) ובאותו כיוון $(1,0,2)$

ולכן הם על ישר אחד. ב׳מתמטית׳: $\Rightarrow \ \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{F} \ \in \ l \ (\checkmark)$

ג. הכיוון של $\vec{AF}$ הוא $(1,0,2)$. הכיוון של ציר x הוא $(1,0,0)$.

הכיוונים אינם פרופורציוניים, ולכן הם אינם מתלכדים ואינם מקבילים.

נבדוק אפשרות לחיתוך:

נקודה אופיינית על $\vec{AF}$ היא: $(7,-2,15)+\mathsf{s}(1,0,2)=(7+\mathsf{s},-2,15+2\mathsf{s})$

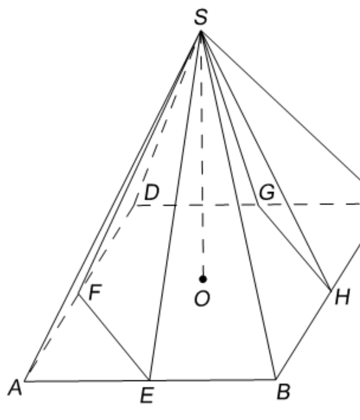
רכיב y של הנקודה האופיינית הוא -2 .

רכיב y של כל הנקודות על ציר x הוא 0 . ולכן אין נקודה משותפת ל־ AF ולציר x .

מסקנה: הישרים אינם נחתכים.

ולכן: הישרים **מ צ ט ל ב י ם** .

<u>שאלה 2</u>



נתונה פירמידה $SABCD$ שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע.

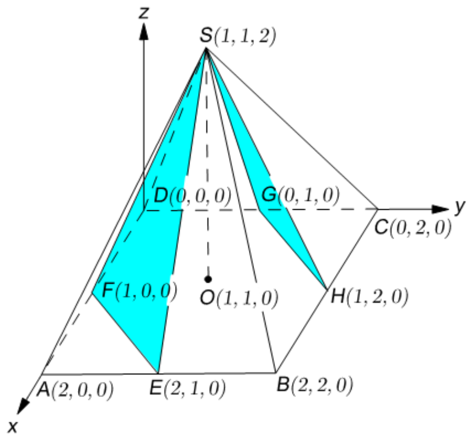
E , F , G , H הן נקודות האמצע של צלעות הבסיס.

נתון כי גובה הפירמידה שווה לצלע הבסיס.

חשב את גודל הזווית שבין המישור SHG למישור SFE .

קדקודי מתומן משוכלל $ABCDEFGH$

פתרון



נמקם את ריבוע הבסיס של הפירמידה

במישור (x,y) כאשר $D(0,0,0)$.

נקבע את אורך צלע הבסיס ל- 2 יחידות אורך.

בהתאם לכך נקבל:

$A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$

E , F , G , H הן נקודות האמצע של צלעות הבסיס,

ולכן:

$E(2,1,0)$, $F(1,0,0)$, $G(0,1,0)$, $H(1,2,0)$

O - מפגש אלכסוני הריבוע. SO - גובה הפירמידה הישרה.

$SO = AB \quad \Rightarrow \quad O(1,1,0)\ ,\ S(1,1,2)$

הזווית המבוקשת היא הזווית שבין שני הנורמלים של המישורים SFE ו- SHG .

מציאת הנורמל של מישור SFE :

$$\vec{FE} = E - F = \underline{x} = (1,1,0) \quad , \quad \vec{FS} = S - F = \underline{u} = (0,1,2)$$

$$\pi1_{SFE} = (1,0,0) + t(1,1,0) + s(0,1,2)$$

$$(a,b,c)\cdot(1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$$

$$(a,b,c)\cdot(0,1,2) = 0 \quad \Rightarrow \quad b + 2c = 0$$

$$\underset{\text{בחירה}}{c = 1} \quad \Rightarrow \quad b = -2 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{h_{\pi1}} = (2,-2,1)$$

מציאת הנורמל של מישור SHG :

$$\vec{GH} = H - G = \underline{x} = (1,1,0) \quad , \quad \vec{GS} = S - G = \underline{v} = (1,0,2)$$

$$\pi2_{SHG} = (0,1,0) + r(1,1,0) + q(1,0,2)$$

$$(a,b,c)\cdot(1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$$

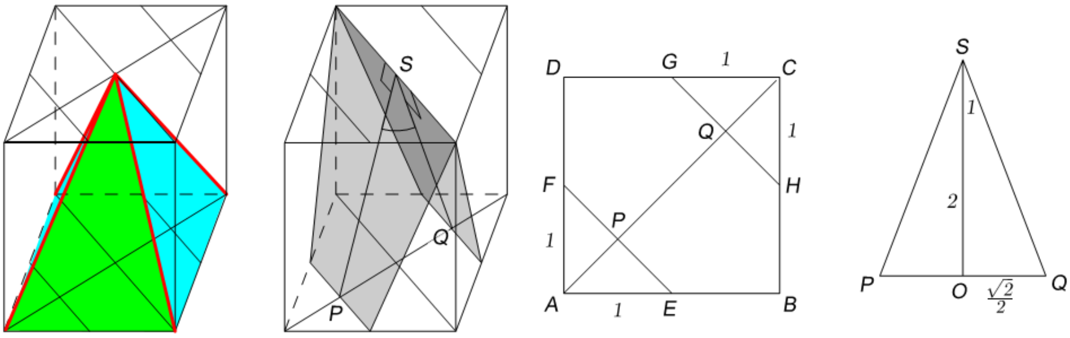
$$(a,b,c)\cdot(1,0,2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 2c = 0$$

$$\underset{\text{בחירה}}{c = 1} \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{h_{\pi2}} = (-2,2,1)$$

$$\cos\alpha = \frac{|(2,-2,1)\cdot(-2,2,1)|}{|(2,-2,1)|\cdot|(-2,2,1)|} = \frac{|-4-4+1|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{7}{9} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 38.94^{\circ}}$$

דרך נוספת לפתרון

נקבע את אורך צלע הבסיס ל־ 2 יחידות אורך.



$$GH = FE = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad , \quad HQ = QC = PA = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad , \quad PQ = AC - 2\,QC = 2\sqrt{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad , \quad OQ = \frac{1}{2}PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\underline{\triangle SOQ:}$ $\quad tg\ S_1 = \frac{OQ}{SO} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \angle S_1 = 19.47^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \angle \mathbf{PSQ = 38.94^{\circ}}$