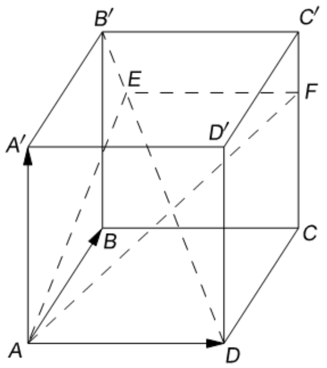
עוד שאלה בוקטורים

שאלה



בקוביה שלפניך $ABCDA'B'C'D'$

נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה E נמצאת על האלכסון DB'

כך שמתקיים: $\vec{DE} = t\,\vec{DB'}$.

הנקודה F נמצאת על המקצוע CC'

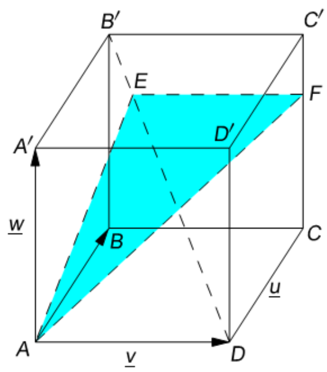
כך שמתקיים: $\vec{CF} = t\,\vec{CC'}$.

א. הבע את הוקטור $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו־ t .

ב. הראה כי הוקטור $\vec{EF}$ מקביל למישור $ABCD$.

ג. האם קיים ערך של t שעבורו האלכסון DB' מאונך למישור AEF ? נמק בעזרת חישובים.

פתרון



א.

$$\vec{DE} = t\,\vec{DB'} = t\,(\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BB'}) = t\,(-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w})$$

$$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \underline{v} + t\,(-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w})$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{AE} = t\,\underline{u} + (1-t)\,\underline{v} + t\,\underline{w}}$$

ב.

$$\vec{CF} = t\,\vec{CC'} = t\,\underline{w}$$

$$\vec{EF} = \vec{ED} + \vec{DC} + \vec{CF} = -t\,(-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w}) + \underline{u} + t\,\underline{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{EF} = (1-t)\,\underline{u} + t\,\underline{v}$$

הוקטורים $\underline{u}$ ו־ $\underline{v}$ פורסים את מישור $ABCD$.

$\vec{EF}$ הוא קומבינציה ליניארית של $\underline{u}$ ו־ $\underline{v}$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{\vec{EF} \parallel ABCD}$ $(\checkmark)$

הערה: עבור $t=0$ הישר EF מתלכד עם הישר DC ומוכל בבסיס $ABCD$.

עבור $t=1$ הישר EF מתלכד עם הישר $B'C'$ ומקביל לבסיס $ABCD$.

ג.

כל מקצועות הקוביה שוות זו לזו $\quad |\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| \quad \Rightarrow \quad \underline{u}^2 = \underline{v}^2 = \underline{w}^2$

$\underline{u} \perp \underline{v} \perp \underline{w} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

אם האלכסון DB' מאונך למישור AEF אזי הוא מאונך לכל ישר במישור, בפרט ל- $\vec{EF}$ ול- $\vec{AE}$.

נבדוק את התנאי לכך ש- $\vec{DB'} \perp \vec{EF}$ ואחר נראה האם בתנאי זה מתקיים: $\vec{DB'} \cdot \vec{AE} = 0$.

$$\vec{DB'} \perp \vec{EF} \quad \Rightarrow \quad \vec{DB'} \cdot \vec{EF} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w}) \cdot ((1-t)\underline{u} + t\underline{v}) = 0$$

$$-t\ \underline{v}^2 + (1-t)\ \underline{u}^2 = 0 \ \ / : \underline{u}^2 \quad \underset{\underline{u}^2 = \underline{v}^2 \neq 0}{\Rightarrow} \quad -t + 1 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\vec{DB'} \cdot \vec{AE} = (-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w}) \cdot (t\ \underline{u} + (1-t)\ \underline{v} + t\ \underline{w}) \underset{t = \frac{1}{2}}{=} (-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w}) \cdot (\frac{1}{2}\ \underline{u} + \frac{1}{2}\ \underline{v} + \frac{1}{2}\ \underline{w})$$

$$= -\frac{1}{2}\ \underline{v}^2 + \frac{1}{2}\ \underline{u}^2 + \frac{1}{2}\ \underline{w}^2 \underset{\underline{u}^2 = \underline{v}^2 = \underline{w}^2}{=} \frac{1}{2}\ \underline{u}^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{DB'} \not\perp \vec{AE}$$

ולכן: **<u>אין</u> ערך של t שעבורו $\vec{DB'} \perp AEF$**