

שאלה נוספת בוקטורים

שאלה 1

נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית. השעורים של ארבעה מבין קודקודי הפירמידה הם: $A(6,a,9)$, $B(4,-2,5)$, $C(-2,2,-1)$, $S(1,1,8)$. בסיס הפירמידה נמצא במישור π : $\underline{x} = (2, -1, 4) + t(4, -3, 5) + s(2, -1, 1)$.
א. חשב את נפח הפירמידה SABCD (ערך מספרי).

פתרון: יהי (u,v,w) וקטור אנכי למישור בסיס הפירמידה, ואז הוא אנכי לווקטורים $(4,-3,5)$ ו- $(2,-1,1)$ המקבילים למישור, כלומר קיימות המשוואות $4u-3v+5w=0$ ו- $2u-v+w=0$. החסרת המשוואה השנייה מפולה ב-2 מן הראשונה נותנת $-v+3w=0$ נבחר $w=1$, ואז $v=3$, ובמשוואה השנייה נקבל $2u-3+1=0$, ולכן $u=1$ ו- (u,v,w) הוא הווקטור $(1,3,1)$. לכן משוואה של מישור הבסיס היא $x+3y+z=q$, כאשר יש לקבוע את q כך שהנקודה $(2,-1,4)$ תקיים את המשוואה. הצבת שיעורי נקודה זאת במשוואה נותנת $q=3$, ולכן משוואת המישור היא $x+3y+z=3$. הנקודה $A(6,a,9)$ נמצאת במישור, ולכן היא מקיימת את משוואת המישור וקיים $6+3a+9=3$, ולכן $a=-4$ ו- A היא הנקודה $(6,-4,9)$. לכן

$$\overline{AB} = (4, -2, 5) - (6, -4, 9) = (-2, 2, -4) \quad |AB| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{BC} = (-2, 2, -1) - (4, -2, 5) = (-6, 4, -6) \quad |AC| = \sqrt{36+16+36} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

$$\cos(\sphericalangle B) = \frac{(-2)(-6) + 2 \cdot 4 + (-4)(-6)}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{22}} = \frac{12+8+24}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{22}} = \frac{44}{8\sqrt{3}\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos^2(\sphericalangle B) = \frac{11}{12}, \quad \sin^2(\sphericalangle B) = 1 - \cos^2(\sphericalangle B) = \frac{1}{12}$$

$$|AB| \cdot |BC| \cdot \sin(\sphericalangle B) = 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{22} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{11}$$

שטח המקבילית הוא לכן $4\sqrt{11}$. נוסחת מרחק נקודה ממישור הבסיס (המשוואה הנורמלית של מישור הבסיס) מתקבלת ממשוואה של מישור הבסיס ע"י חילוקה בשורש ריבועי המקדמים ולכן היא $\frac{x+3y+z-3}{\sqrt{11}}$. הצבת קודקוד הפירמידה $S(1,1,8)$

$$\text{בביטוי זה נותנת } \frac{1+3+8-3}{\sqrt{11}} = \frac{9}{\sqrt{11}}, \text{ ולכן זהו מרחק הקודקוד מבסיס הפירמידה, כלומר הוא גובה}$$

$$\text{הפירמידה. מכיוון שנפח פירמידה הוא שליש שטח הבסיס כפול בגובהה, נפחה הוא } \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{11} \cdot \frac{9}{\sqrt{11}} = 12$$

ב. המישור π חותך את הצירים בנקודות K, L, M . מצא את היחס בין נפח הפירמידה SABCD לבין נפח הפירמידה OKLM (O – ראשית הצירים).

פתרון: כפי ראינו משוואת π היא $x+3y+z=3$. עבור ציר ה-x קיים $y=z=0$ ולכן נקודת החיתוך היא $K(3,0,0)$, עבור ציר ה-y קיים $x=z=0$ ולכן נקודת החיתוך היא $L(0,1,0)$, ועבור ציר ה-z קיים $x=y=0$ ולכן נקודת החיתוך היא $M(0,0,3)$. OKLM היא פירמידה משולשת שבסיסה הוא המשולש ישר הזווית OKL הנמצא במישור xy ואורכי הניצבים שלו הם 3 ו-1 ולכן שטחו הוא $3/2$. קודקוד הפירמידה הוא $M(0,0,3)$ ולכן גובה הפירמידה הוא 3, ונפחה הוא שליש שטח הבסיס כפול בגובה, כלומר $3/2 \cdot 3 = 9/2$. מכיוון שהנפח של SABC הוא 12, יחס הנפחים הוא 8.

ג. כוון הגובה של הפירמידה הוא כוון הווקטור $(1,3,1)$, שהוא וקטור הניצב למישור הבסיס. הוא אינו מקביל למישור yz שעליו נמצאים הקודקודים O,L,M כי הרכיב הראשון שלו אינו 0, הוא אינו מקביל למישור xz שעליו נמצאים הקודקודים O,K,M כי הרכיב השני שלו אינו 0, והוא אינו מקביל למישור xy שעליו נמצאים הקודקודים O,K,L כי הרכיב השלישי שלו אינו 0, והוא אינו מקביל ל- π כי הוא ניצב ל- π .