# עוד שתי שאלות בוקטורים

## שאלה 1

המישור $\pi$ מקביל לציר $y$ וחותך את ציר $z$ בנקודה שבה $z = 1$ .

הישר $l_1:\ \underline{x} = (4, 2, -1) + t(2m, 0, m + 2)$ מוכל במישור $\pi$ .

**א.** מצא את משוואת המישור $\pi$ .

**ב.** מצא את ערך הפרמטר $m$ .

הצב ב־ $l_1$ את ערך הפרמטר $m$ שמצאת בסעיף ב, ופתור את סעיף ג.

**ג.** ישר $l_2$ , המאונך לציר $z$ ועובר דרך ראשית הצירים, חותך את הישר $l_1$ .

מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר $l_2$ .

## פתרון

**א.** המישור $\pi$ מקביל לציר $y$ . מכאן שוקטור כיוון אחד שלו הוא: $\underline{x} = (0, 1, 0)$ .

המישור $\pi$ חותך את ציר $z$ בנקודה שבה $z = 1$ , לכן $(0, 0, 1)$ מוכלת במישור $\pi$ .

הישר $l_1:\ \underline{x} = (4, 2, -1) + t(2m, 0, m + 2)$ מוכל במישור $\pi$ ,

ולכן (עבור $t = 0$) הנקודה $(4, 2, -1)$ מוכלת אף היא במישור $\pi$ .

משתי נקודות אלו ניתן למצוא וקטור כיוון שני במישור $\pi$ :

$$\underline{x} = (4, 2, -1) - (0, 0, 1) = (4, 2, -2) = 2\cdot (2, 1, -1) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (2, 1, -1)$$

הצגה פרמטרית של מישור $\pi$ היא: $\pi:\ \ \underline{x} = (0, 0, 1) + r(0, 1, 0) + s(2, 1, -1)$

משוואת המישור: $ax + by + cz + d = 0$

$$r = 0\ ,\ s = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0, 1) \in \pi \quad \Rightarrow \quad (1)\ \ c + d = 0$$

$$r = 1\ ,\ s = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 1, 1) \in \pi \quad \Rightarrow \quad (2)\ \ b + c + d = 0$$

$$r = 0\ ,\ s = 1 \quad \Rightarrow \quad (2, 1, 0) \in \pi \quad \Rightarrow \quad (3)\ \ 2a + b + d = 0$$

$$(1)\ \ c = -d \quad \Rightarrow \quad (2)\ \ b - d + d = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$(3)\ \ 2a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2a \quad , \quad \underset{\text{בחירה}}{a = 1} \quad \Rightarrow \quad d = -2 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi :\ \ x + 2z - 2 = 0}$$

**ב.**

ממשוואת המישור שבסעיף א׳: נורמל המישור $\pi$ הוא $(1,0,2)$ . $l_1$ מוכל במישור $\pi$ .

וקטור הכיוון של $l_1$ הוא $\underline{x}=(2m,0,m+2)$ והוא מאונך לנורמל של המישור:

$$(1,0,2)\cdot(2m,0,m+2)=0 \quad\Rightarrow\quad 2m+0+2(m+2)=0 \quad\Rightarrow\quad 4m+4=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{m=-1}$$

**ג.**

$$m=-1 \quad\Rightarrow\quad l_1:\quad (4,2,-1)+t\,(-2,0,1)$$

$l_2$ מאונך לציר $z$ ועובר דרך ראשית הצירים.

לכן הוא מוכל במישור $(x,y)$ . משוואת מישור $(x,y)$ היא $z=0$ .

לכן נקודת חיתוך הישר $l_1$ עם הישר $l_2$ היא נקודת החיתוך של $l_1$ עם המישור $z=0$ .

נקודת החיתוך $z=0 \quad\Rightarrow\quad -1+t=0 \quad\Rightarrow\quad t=1 \quad\Rightarrow\quad (4,2,-1)+1\cdot(-2,0,1)=(2,2,0)$

יש לנו שתי נקודות ידועות על $l_2$ - $(0,0,0)$ ו־ $(2,2,0)$ לכן וקטור הכיוון שלו הוא:

$$\underline{x}=(2,2,0)-(0,0,0)=(2,2,0)=2\cdot(1,1,0) \quad\Rightarrow\quad \underline{x}=(1,1,0) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{l_2:\ \underline{x}=t\,(1,1,0)}$$

# <u>שאלה 2</u>

מקבילית $ABCD$ מונחת על מישור $\pi$ שהצגתו הפרמטרית היא:

$$\underline{x}=(6,-2,-5)+t(2,-2,-1)+k(-6,2,-1)$$

שלושה מקדקודי המקבילית הם: $C(-2,2,-5)$ , $B(2,2,-3)$ , $A(4,0,z)$ .

**א.** מצא את שיעורי הקדקוד $D$ .

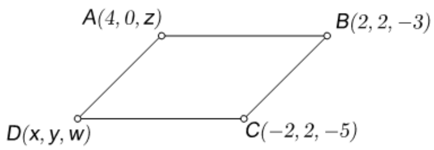
**ב.** ישר המאונך למישור $\pi$ עובר דרך הקדקוד $D$ . נקודה $E$ נמצאת על ישר זה.

הקטע $AE$ מונח על הישר $\underline{x}=(4,0,-4)+r(3,-2,4)$ .

מצא את שטח המשולש $AED$ .

# פתרון

**א.** מציאת משוואת מישור $\pi$ ע״פ $3$ נקודות שעליו:




$B(2,2,-3) \quad \Rightarrow \quad (I) \;\; 2a+2b-3c+d=0$

$C(-2,2,-5) \quad \Rightarrow \quad (II) \;\; -2a+2b-5c+d=0$

$(6,-2,-5) \quad \Rightarrow \quad (III) \;\; 6a-2b-5c+d=0$

$$\left.\begin{array}{l} (I)+(II) \quad \Rightarrow \quad 4b-8c+2d=0 \quad (*) \\ \\ 3(II)+(III) \quad \Rightarrow \quad 4b-20c+4d=0 \end{array}\right\} - \quad \Rightarrow \quad 12c-2d=0 \quad \Rightarrow \quad d=6c$$

$\underset{\text{בחירה}}{\underline{c=1}} \quad \Rightarrow \quad \underline{d=6} \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad 4b-8+2\cdot 6=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b=-1}$

$\Rightarrow \quad (I) \;\; 2a-2-3+6=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a=-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \pi: \;\; -\frac{1}{2}x-y+z+6=0 \;\; /\cdot(-2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\pi: \;\; x+2y-2z-12=0}$

$A(4,0,z) \in \pi \quad \Rightarrow \quad 4-2z-12=0 \quad \Rightarrow \quad z=-4 \quad \Rightarrow \quad \underline{A(4,0,-4)}$

$\underline{D:} \;\; D(x,y,w) \;\; , \;\; AD \parallel BC \;\; , \;\; AD=BC \quad \Rightarrow \quad \vec{AD}=\vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (x-4 \; , \; y \; , \; w+4)=(-4 \; , \; 0 \; , \; -2)$

$\Rightarrow \quad x=0 \; , \; y=0 \; , \; w=-6 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D(0 \; , \; 0 \; , \; -6)}$

**ב.**

עבור $ED$ ידועה נקודה $D$ שעליו ווקטור הכיוון שלו - הנורמל של $\pi$ : $(1,2,-2)$

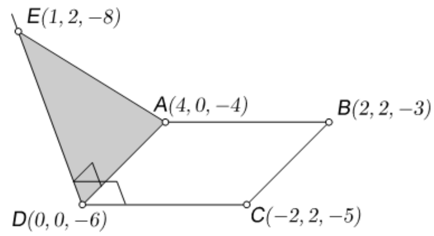
נקודה אופיינית על $ED$ : $\quad ED: \;\; \underline{x}=(0,0,-6)+s(1,2,-2) \quad \Rightarrow \quad E(s \; , \; 2s \; , \; -6-2s)$

נקודה אופיינית על $AE$ : $\quad AE: \;\; \underline{x}=(4,0,-4)+r(3,-2,4) \quad \Rightarrow \quad E(4+3r \; , \; -2r \; , \; -4+4r)$

$\underline{E:} \;\; (I) \;\; s=4+3r \;\; , \;\; (II) \;\; 2s=-2r$

$(II) \;\; s=-r \quad \Rightarrow \quad (I) \;\; -r=4+3r \quad \Rightarrow \quad -4r=4 \quad \Rightarrow \quad \underline{r=-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{s=1}$

(הפתרון מקיים גם את המשוואה השלישית: $-6-2s=-4+4r$ . בדוק!)




$\Rightarrow \quad E(1 \; , \; 2 \; , \; -6-2) \quad \Rightarrow \quad E(1 \; , \; 2 \; , \; -8)$

$|\vec{ED}| = \sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2+(-6+8)^2}=3$

$|\vec{AD}| = \sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(-4+6)^2}=\sqrt{20}$

$\boldsymbol{S_{\triangle ADE} = \frac{3\sqrt{20}}{2} = 6.71}$ **(יחידות ריבועיות)**