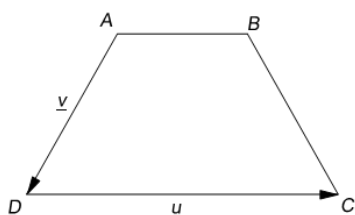


תרגול נוסף בוקטורים

שאלה



נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

נתון כי $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\vec{AB} = t\vec{u}$, $\vec{AD} = \vec{v}$, $\vec{DC} = \vec{u}$.

א. (1) הבע את t באמצעות $|\vec{u}|$ ו- $|\vec{v}|$.

(2) הבע את הוקטור \vec{BC} באמצעות \vec{u} , \vec{v} , $|\vec{u}|$ ו- $|\vec{v}|$.

נתון: $\vec{u} = (8, 6, -10)$, $\vec{v} = (-1, y, 0)$.

ב. (1) מצא את שיעור y של הוקטור \vec{v} (מצא את שתי האפשרויות).

(2) מבין שני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף ב (1), מצא עבור איזה ערך של y

הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו.

הערה: אפשר לפתור את סעיף ב' בלי להסתמך על הפתרון של סעיף א'.

פתרון

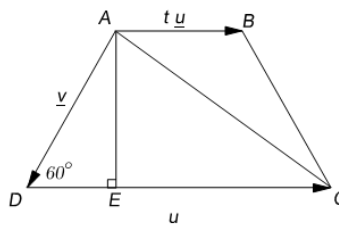
א. (1)

$$\angle DAB = 120^\circ \Rightarrow \angle D = 60^\circ$$

$$DE = \frac{DC - AB}{2} = \frac{|\vec{u}| - t|\vec{u}|}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{DE}{DA} = \frac{\frac{|\vec{u}| - t|\vec{u}|}{2}}{|\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{u}| - t|\vec{u}| \Rightarrow t = \frac{|\vec{u}| - |\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$



(2)

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} = -t\vec{u} + \vec{v} + \vec{u} = \vec{v} + (1-t)\vec{u} = \vec{v} + \left(1 - \frac{|\vec{u}| - |\vec{v}|}{|\vec{u}|}\right)\vec{u}$$

$$\vec{BC} = \vec{v} + \left(1 - 1 + \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\right)\vec{u} \Rightarrow \vec{BC} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\vec{u} + \vec{v}$$

ב. (1)

הזווית בין הוקטורים \vec{u} ו- \vec{v} היא 120° (למרות מה שנראה בציור כ- 60°),

כי הזווית מוגדרת כזווית כאשר הראשים של שני הוקטורים יוצאים מנקודה אחת:

$$\underline{u} = (8, 6, -10) \quad , \quad \underline{v} = (-1, y, 0) \quad , \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{(8,6,-10) \cdot (-1,y,0)}{\sqrt{64+36+100} \cdot \sqrt{1+y^2}}$$

$$\frac{6y-8}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{1+y^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 16 - 12y = * \sqrt{200} \cdot \sqrt{1+y^2} / ()^2$$

$$256 - 384y + 144y^2 = 200(1+y^2) / : 8$$

$$32 - 48y + 18y^2 = 25(1+y^2) = 25 + 25y^2 \Rightarrow 7y^2 + 48y - 7 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-48 \pm 50}{14} = \frac{-24 \pm 25}{7} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{7} \quad , \quad y_2 = -7$$

בדיקה:

$$(*) \quad \underline{y} = \frac{1}{7}: 16 - \frac{12}{7} \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{49}} \rightarrow \frac{100}{7} \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{50}}{7} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{7} = \frac{100}{7} \quad (\checkmark)$$

$$\underline{y} = -7: 16 - 12 \cdot (-7) \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+49} \Rightarrow 100 \stackrel{?}{=} 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = 10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 100 \quad (\checkmark)$$

(2)

אם DC הוא קוטר הטרפז שחסום במעגל אזי $\angle DAC$ היא זווית היקפית שנשענת על קוטר.

כזו - היא זווית ישרה. $\angle D = 60^\circ$. מתקיים: $DC = 2 AD$.

$$y = -7 \Rightarrow AD = |\underline{v}| = |(-1, -7, 0)| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = \underline{5\sqrt{2}}$$

$$DC = |\underline{u}| = |(8, 6, -10)| = \sqrt{200} = \underline{10\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow DC = 2 AD \quad (\checkmark) \Rightarrow \underline{y = -7}$$