שאלה בוקטורים

שאלה

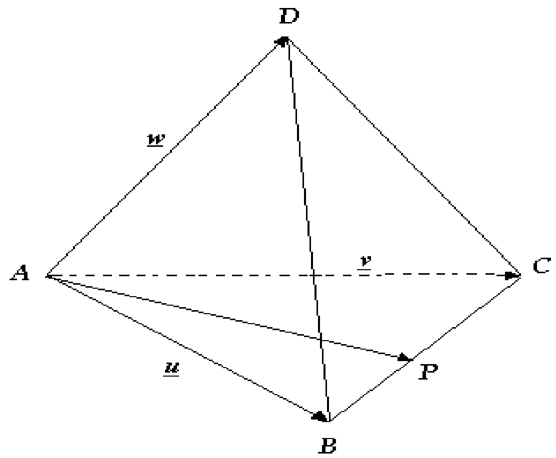
בפירמידה $ABCD$, הבסיס ABC הוא משולש שווה צלעות.

נסמן: $\overrightarrow{AD}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$. נתון כי $\angle DAC=36.8^o$, $\angle DAB=120^o$, $\overrightarrow{BP}=t\cdot\overrightarrow{BC}$.

א. בטאו את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ באמצעות t, $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. עבור איזה ערך של t הזווית בין הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{AD}$ תהיה שווה לזווית בין הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{AC}$?

פתרון



א. לפי כללי חיבור וקטורים:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\underline{v}-\underline{u}$$

ולכן

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{BP}=\underline{u}+t\cdot(\underline{v}-\underline{u})=(1-t)\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v}\ .$$

נבטא את הקוסינוסים של הזוויות המבוקשות:

$$\cos\angle PAD = \frac{\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}$$
$$\cos\angle PAC = \frac{\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

אם הזוויות שוות מתקיים:

$$\frac{\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}\right) = \left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$$
$$|\underline{w}|\cdot\left(((1-t)\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v})\cdot\underline{v}\right) = |\underline{v}|\cdot\left(((1-t)\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v})\cdot\underline{v}\right)$$
$$|\underline{w}|\cdot\left[(1-t)\cdot(\underline{u}\cdot\underline{v})+t\cdot(\underline{v}\cdot\underline{v})\right] = |\underline{v}|\cdot\left[(1-t)\cdot(\underline{u}\cdot\underline{w})+t\cdot(\underline{v}\cdot\underline{w})\right]$$

מהנתון $\angle DAB = 120^o$ נקבל:

$$\cos\angle DAB = \frac{\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(\underline{w}\cdot\underline{u})}{|\underline{w}|\cdot|\underline{u}|} = -0.5$$
$$(\underline{w}\cdot\underline{u}) = -0.5\cdot|\underline{w}|\cdot|\underline{u}|$$

וכן, כיוון ש- $\angle DAC = 36.8^o$ נקבל:

$$\cos\angle DAC = \frac{\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(\underline{w}\cdot\underline{v})}{|\underline{w}|\cdot|\underline{v}|} = 0.8$$
$$(\underline{w}\cdot\underline{v}) = 0.8\cdot|\underline{w}|\cdot|\underline{v}|$$

כיוון שבסיס הפירמידה הוא משולש שווה צלעות, מתקיים $|\underline{u}| = |\underline{v}|$. נסמן $a = |\underline{v}| = |\underline{u}|$, וכן נסמן $|\underline{w}| = b$. נציב הכל בשוויון האחרון אליו הגענו (השקול לשוויון הזוויות) ונקבל:

$$|\underline{w}|\cdot\left[(1-t)\cdot(\underline{u}\cdot\underline{v})+t\cdot(\underline{v}\cdot\underline{v})\right] = |\underline{v}|\cdot\left[-0.5\cdot(1-t)\cdot|\underline{w}|\cdot|\underline{u}|+0.8\cdot t\cdot|\underline{w}|\cdot|\underline{v}|\right]$$
$$b\cdot\left[(1-t)\cdot(\underline{u}\cdot\underline{v})+t\cdot(\underline{v}\cdot\underline{v})\right] = a\cdot\left[-0.5\cdot(1-t)\cdot ab+0.8\cdot t\cdot ab\right]$$

כעת נשים לב כי

$$(\underline{v}\cdot\underline{v})=|\underline{v}|^2=a^2$$

$$(\underline{u}\cdot\underline{v})=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 60^o=0.5\cdot a^2$$

ולכן, אם נציב תוצאות אלה נקבל:

$$b\cdot\left[(1-t)\cdot 0.5\cdot a^2+t\cdot a^2\right]=a\cdot\left[-0.5\cdot(1-t)\cdot ab+0.8\cdot t\cdot ab\right]$$
$$a^2b\cdot\left[0.5\cdot(1-t)+t\right]=a^2b\cdot\left[-0.5\cdot(1-t)+0.8\cdot t\right]$$
$$0.5\cdot(1-t)+t=-0.5\cdot(1-t)+0.8\cdot t$$
$$0.5-0.5t+t=-0.5+0.5t+0.8t$$
$$0.8t=1$$
$$t=1.25$$