שתי שאלות בוקטורים

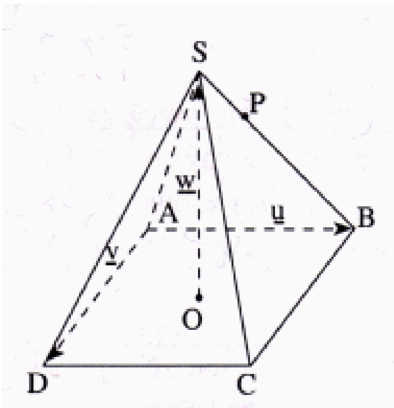
שאלה 1

בסיסה של הפירמידה הישרה SABCD הוא ריבוע שאלכסוניו נפגשים בנקודה O. נסמן:
$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{OS}=\underline{w}$. נתון כי $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=a$, וכן $\overrightarrow{BP}=t\cdot\overrightarrow{BS}$.

א. הביעו את $\overrightarrow{PA}$ ואת $\overrightarrow{PC}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- t.

ב. מצאו את ערכי t עבורם $\overrightarrow{PA}$ ו- $\overrightarrow{PC}$ מאונכים זה לזה.

ג. באמצעות a הביעו את שטח המשולש APC עבור הערך הקטן ביותר של t מהין הערכים שנמצאו בסעיף ב.



פתרון

א.

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PS}-\overrightarrow{SO}-\overrightarrow{AO}=(1-t)\overrightarrow{BS}-\underline{w}-\frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}=$$

$$=(1-t)(0.5(-\underline{u}+\underline{v})+\underline{w})-\underline{w}-\frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}=$$

$$=\underline{u}(0.5(t-1)-0.5)+\underline{w}(1-t-1)+\underline{v}(0.5(1-t)-0.5)=$$

$$=\underline{u}(0.5t-1)+\underline{v}(-0.5t)+\underline{w}(-t)$$

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\underline{u}(0.5t-1)+\underline{v}(-0.5t)+\underline{w}(-t)+\underline{v}+\underline{u}=$$

$$=\underline{u}(0.5t)+\underline{v}(1-0.5t)+\underline{w}(-t)$$

ב.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\underline{u}(0.5t-1)+\underline{v}(-0.5t)+\underline{w}(-t))\cdot(\underline{u}(0.5t)+\underline{v}(1-0.5t)+\underline{w}(-t))=$

$=|\underline{u}|^2\ (0.5t-1)(0.5t)+|\underline{v}|^2\ (-0.5t)(1-0.5t)+|\underline{w}|^2\ t^2=$

$=a^2(0.25t^2-0.5t-0.5t+0.25t^2+t^2)=a^2(1.5t^2-t)$

כדי שיתקיים $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PC}$ צריך להתקיים $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$:

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=a^2(1.5t^2-t)=0$

$0=1.5t^2-t=t(1.5t-1)$

$t_1=0$

$t_2=2/3$

ג. נשים לב שעבור ערכי t שמצאנו, $\triangle APC$ הוא משולש ישר זווית, ואז:

$t=0$

$P=B$

$\triangle APC=\triangle ABC$

$S_{APC}=\frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}{2}=a^2/2$

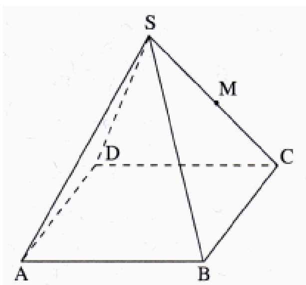
שאלה 2

בסיסה של הפירמידה SABCD הוא מקבילית ($AB\parallel DC,\quad AD\parallel BC$). הנקודה M היא אמצע המקצוע SC. נתונים שיעורי הנקודות הבאים:

$A(0,7,-2),\ B(-1,2,0),\ C(3,1,3),\ S(5,3,7)$.

א. מצאו את משוואת המישור הנקבע על ידי הנקודות B, D ו-M.

ב. מצאו את הזוית בין המישור שמצאתם בסעיף א ובין הישר הנקבע על ידי הנקודות D ו-S.



פתרון

א.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (1,5,-2)+(4,-1,3) = (5,4,1)$

נמצא את הנקודה M עפ"י נוסחת אמצע קטע

$$M = \frac{C+S}{2} = \frac{1}{2}(8,4,10) = (4,2,5)$$
$$\overrightarrow{BM} = (5,0,5)$$
$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BM} = (4\cdot5-0\cdot1, 1\cdot5-5\cdot5, 5\cdot0-4\cdot5) = (20,-20,-20)$$

מכפלה וקטורית של שני וקטורים ניצבת למישור הנפרש על ידיהם. לכן הווקטור $(20,-20,-20)$ ניצב למישור המבוקש, ולכן גם $(1,-1,-1)$ ניצב למישור (מכפלה בסקלר).

משוואת המישור היא מהצורה:

$$x-y-z=D$$

נחפש את הערך D לפי הנתון שהמישור מכיל את הנקודה B, למשל:

$$B(-1,2,0)$$
$$x-y-z=D$$
$$-1-2-0=D$$
$$D=-3$$

ומשוואת המישור היא

$$x-y-z=-3$$

או

$$x-y-z+3=0$$

נבדוק שאכן הנקודות הנוספות D,M מוכלות במישור:

$$D = B+\overrightarrow{BD} = (-1,2,0)+(5,4,1) = (4,6,1)$$
$$x_D-y_D-z_D = 4-6-1=-3$$
$$M=(4,2,5)$$
$$x_M-y_M-z_M = 4-2-5=-3$$

ואכן המישור שאת משוואתו מצאנו הוא המישור הנקבע ע"י הנקודות B,D,M.

.ב

$$\sin(\beta) = \frac{|(1,-1,-1)\cdot \overrightarrow{DS}|}{|(1,-1,-1)|\cdot|\overrightarrow{DS}|}$$

$$\overrightarrow{DS} = (5,3,7)-(4,6,1) = (1,-3,6)$$

$$|\overrightarrow{DS}| = \sqrt{1+9+36} = \sqrt{46}$$

$$|(1,-1,-1)| = \sqrt{3}$$

$$\sin(\beta) = \frac{|(1,-1,-1)\cdot(1,-3,6)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{46}} = \frac{|1+3-6|}{\sqrt{138}} = \frac{2}{\sqrt{138}} = 0.17$$

$$\beta = 9.802$$