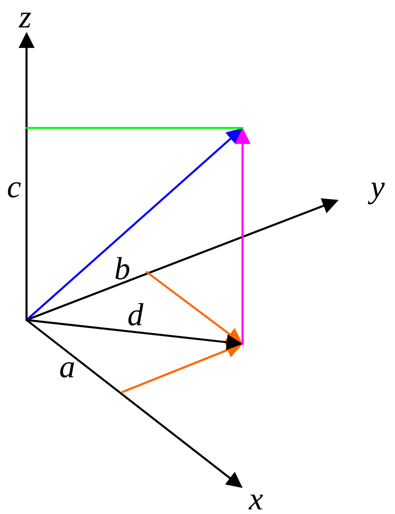
אני מניח שכל הקוראים מכירים את המונח ווקטור ואת הפעולות הבסיסיות על ווקטורים (חיבור, חיסור, כפל בסקלר).

<u>אורך של ווקטור:</u>
במקרה המישורי המקרה מאד פשוט. הנוסחה לאורכו של ווקטור נובעת ישירות ממשפט פיתגורס. אם (a,b) הוא ווקטור אזי הוא היתר של משולש ישר זוית ששני ניצביו הם באורכים a ו-b ולכן אורכו d מקיים את הנוסחה: $d^2 = a^2 + b^2$.
במקרה המרחבי העניין טיפה יותר מורכב. נסתכל על הווקטור (a,b,c).



הווקטור הוא הקו הכחול. הוא בעל שלושה היטלים על הצירים, a,b,c.
נסתכל על ההיטל של הווקטור על המישור xy. בציור הוא מסומן ב-d. את אורכו אנו יודעים לחשב מפני שהוא ווקטור במישור. אורכו מקיים את הנוסחה: $d^2 = a^2 + b^2$. (יש לשים לב לעובדה שהקוים הכתומים מאונכים לצירים x ו-y).
כעת נסתכל על משולש ישר זוית שמורכב משני ניצבים d והקו הוורוד, והיתר שהוא הווקטור שלנו. ניתן לראות שאורכו של הניצב הוורוד הוא c. גם כאן, נוכל להפעיל את משפט פיתגורס:

$$|(a,b,c)|^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

<u>המכפלה הסקלרית</u>
<u>הגדרה (גם למקרה המישורי וגם למקרה המרחבי):</u>

$$(a,b) \bullet (c,d) = ac + bd$$

$$(a,b,c) \bullet (\alpha,\beta,\gamma) = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

תכונות המכפלה הסקלרית (כל ההוכחות ניתנו למקרה המרחבי, אבל נכונות גם למקרה המישורי):

- חוק החילוף. ניתן לראות בקלות, לפי ההגדרה, שאם $\underline{u},\underline{v}$ ווקטורים אזי מתקיים $\underline{u} \bullet \underline{v} = \underline{v} \bullet \underline{u}$. זה נובע ישירות מחוק החילוף בכפל ובחיבור.

- כפל בסקלר. אם $\underline{u},\underline{v}$ וקטורים ו-c,d סקלרים אז מתקיים: $(c\underline{u})\bullet(d\underline{v}) = cd(\underline{u}\bullet\underline{v})$.

הוכחה:

$$\underline{u} = (\alpha,\beta,\gamma)$$
$$\underline{v} = (x,y,z)$$
$$(c\underline{u})\bullet(d\underline{v}) = (c\alpha,c\beta,c\gamma)\bullet(dx,dy,dz) = cd\alpha x + cd\beta y + cd\gamma z =$$
$$cd(\alpha x + \beta y + \gamma z) = cd[(\alpha,\beta,\gamma)\bullet(x,y,z)] = cd(\underline{u}\bullet\underline{v})$$

- חוק הפילוג. אם $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ וקטורים אזי מתקיים $\underline{w}\bullet(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{w}\bullet\underline{u} + \underline{w}\bullet\underline{v}$

הוכחה:

$$\underline{w} = (w_1,w_2,w_3)$$
$$\underline{u} = (u_1,u_2,u_3)$$
$$\underline{v} = (v_1,v_2,v_3)$$
$$\underline{w}\bullet(\underline{u}+\underline{v}) = (w_1,w_2,w_3)\bullet[(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)] =$$
$$(w_1,w_2,w_3)\bullet(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3) =$$
$$w_1(u_1+v_1)+w_2(u_2+v_2)+w_3(u_3+v_3) =$$
$$w_1u_1 + w_1v_1 + w_2u_2 + w_2v_2 + w_3u_3 + w_3v_3 =$$
$$(w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3) + (w_1v + w_2v_2 + w_3v_3) =$$
$$\underline{w}\bullet\underline{u} + \underline{w}\bullet\underline{v}$$

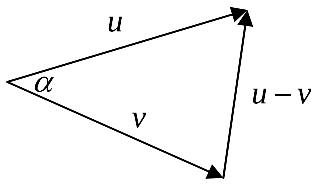
- אם $\underline{u}$ וקטור אזי מתקיים: $|\underline{u}|^2 = \underline{u}\bullet\underline{u}$

הוכחה:

$$\underline{u} = (a,b,c)$$
$$\underline{u}\bullet\underline{u} = (a,b,c)\bullet(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 = |\underline{u}|^2$$

- אם $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ וקטורים ו- α היא הזוית שביניהם אז מתקיים: $\underline{u}\bullet\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\alpha$

הוכחה:



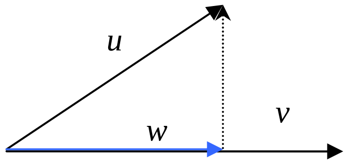
יש לשים לב שמהתכונות הקודמות נובע שהמכפלה הסקלרית מתנהגת כמו מכפלה רגילה ולכן אפשר להשתמש בכל נוסחאות הכפל המקוצר שהיו נהוגות על מספרים ממשיים על ביטויים שכוללים ווקטורים ומכפלה סקלרית.נשתמש במשפט הקוסינוס ובכל התכונות שהוכחנו עד עתה:

$$|\underline{u}-\underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos\alpha$$
$$(\underline{u}-\underline{v})\bullet(\underline{u}-\underline{v}) = \underline{u}\bullet\underline{u} + \underline{v}\bullet\underline{v} - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos\alpha$$
$$\underline{u}\bullet\underline{u} - 2(\underline{u}\bullet\underline{v}) + \underline{v}\bullet\underline{v} = \underline{u}\bullet\underline{u} + \underline{v}\bullet\underline{v} - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos\alpha$$
$$\underline{u}\bullet\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\alpha$$

מכאן גם נובעת המסקנה ששני ווקטורים מאונכים אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם היא 0.

נשים לב לעוד עובדה חשובה. אם הווקטור (a,b) מאונך לווקטורים $(-b,a)$ ו-$(b,-a)$. אפשר לראות זאת לפי המכפלה הסקלרית. נשתמש גם בעובדה זו בהמשך.

היטלים:



נתונים שני ווקטורים $\underline{u},\underline{v}$ כמו בציור (הזנבות של u ושל v ו-w נמצאים באותה נקודה).
נעביר מהווקטור $\underline{u}$ אנך לווקטור $\underline{v}$ ונקבל ווקטור חדש $\underline{w}$. הווקטור $\underline{w}$ נקרא ההיטל של $\underline{u}$ על $\underline{v}$ ויסומן כך: $\underline{w} = \underline{u}_{\underline{v}}$.

אפשר לדמיין זאת אחרת. דמינו שמעל הווקטור $\underline{u}$ יש נורה, והיא יוצרת את הצל של $\underline{u}$ על $\underline{v}$. את הצל הזה סימנו ב-$\underline{u}_{\underline{v}}$.

נשים לב כי $\underline{u}_{\underline{v}}$ מקביל לווקטור $\underline{v}$ ולכן קיים סקלר t המקיים $\underline{u}_{\underline{v}} = t \cdot \underline{v}$

האנך שהעברנו כדי ליצור את $\underline{w}$ הוא בעצם $\underline{u} - \underline{w}$.
מכאן נשתמש בתכונת המכפלה הסקלרית:

$$(\underline{u} - \underline{w}) \bullet \underline{v} = 0$$

$$\underline{u} \bullet \underline{v} - \underline{w} \bullet \underline{v} = 0$$

$$w = t \cdot v$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{u} \bullet \underline{v} - t \cdot \underline{v} \bullet \underline{v} = 0$$

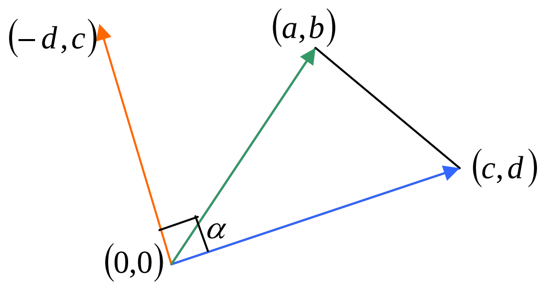
$$t = \frac{\underline{u} \bullet \underline{v}}{\underline{v} \bullet \underline{v}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{u}_{\underline{v}} = \frac{\underline{u} \bullet \underline{v}}{\underline{v} \bullet \underline{v}} \cdot \underline{v}$$

קיבלנו נוסחה לחישוב ההיטל $\underline{u}_{\underline{v}}$. נשתמש בה בהמשך.

שטח משולש



נתון משולש בעל שני קדקודים (a,b) ו- (c,d) וקדקוד שלישי שהוא הראשית. נסמן $\underline{u}=(a,b),\underline{v}=(c,d)$. ידוע משיקולים טריגונומטריים כי שטח המשולש הוא:

$$S=\frac{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\sin\alpha}{2}$$

נבנה ווקטור חדש שמאונך לוקטור $\underline{v}=(c,d)$ ובעל אותו אורך. בציור הוא הווקטור הכתום. נסמנו: $\underline{w}=(-d,c)$. מתקיימים שני דברים:

1) $|\underline{w}|=|\underline{v}|$

2) הזווית בין $\underline{w}$ ל- $\underline{v}$ היא $90°-\alpha$.

$$\underline{u}\bullet\underline{w}=|\underline{u}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos(90°-\alpha)=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$S=\frac{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{\underline{u}\bullet\underline{w}}{2}=\frac{(a,b)\bullet(-d,c)}{2}=\frac{bc-ad}{2}$$

בהנתן משולש כללי שקדקודיו הם $A=(x_1,y_1),B=(x_2,y_2),C=(x_3,y_3)$. במקרה זה נזיז את המשולש כך שאחד מקדקודיו יהיה בראשית. נקבל משולש בעל קדקוד אחד בראשית ושני קדקודים $P=(x_1-x_3,y_1-y_3),Q=(x_2-x_3,y_2-y_3)$ ונחשב את שטחו לפי אותה נוסחה:

$$S=\frac{(y_1-y_3)\cdot(x_2-x_3)-(x_1-x_3)\cdot(y_2-y_3)}{2}$$

נזכור כי יכול לקרות מצב שבו הווקטור w יצא הפוך. כלומר הזוית בינו לבין v היא לא $90°-\alpha$ אלא $90+\alpha$. במקרה זה יכול להיות שהקוסינוס יצא שלילי ולכן גם נקבל שטח שלילי. כדי למנוע מקרה זה נשים את כל הנוסחה בערך מוחלט ונקבל:

$$S=\left|\frac{(y_1-y_3)\cdot(x_2-x_3)-(x_1-x_3)\cdot(y_2-y_3)}{2}\right|$$

<u>הישר במישור</u>

ישר במישור הוא אוסף כל הנקודות (x,y) המקיימות את המשוואה $ax+by+c=0$

<u>טענה:</u>

אם A ו-B הן נקודות על הישר אזי הווקטור $\overrightarrow{AB}$ מאונך לווקטור (a,b).

<u>הוכחה:</u>

$$A=(x_1,y_1)$$
$$B=(x_2,y_2)$$
$$-\begin{cases} ax_2+by_2+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$ax_2-ax_1+by_2-by_1=0$$
$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$$
$$(a,b)\bullet(x_2-x_1,y_2-y_1)=0$$
$$(a,b)\bullet\overrightarrow{AB}=0$$
$$(a,b)\perp\overrightarrow{AB}$$

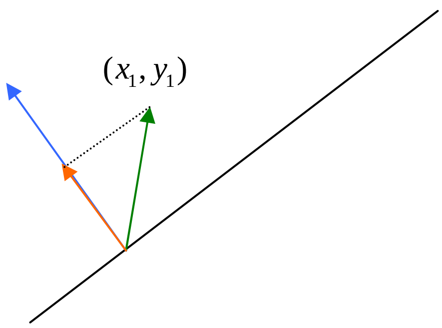
מכאן נובעת מסקנה שאם נתונים שני ישרים $ax+by+c=0$ ו- $dx+ey+f=0$ אז הם מקבילים אם ורק אם הווקטורים (a,b) ו- (d,e) מקבילים.

<u>טענה 2:</u>

מרחק הנקודה (x_1,y_1) מהישר $ax+by+c=0$ נתונה על ידי הנוסחה:

$$d=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

<u>הוכחה:</u>



הוקטור הירוק מיצג וקטור שנוצר מנקודה כלשהי על הישר לנקודה (x_1,y_1). נסמנו $\underline{u}=(x_1-x,y_1-y)$. הווקטור הכחול הוא הווקטור $\underline{v}=(a,b)$ שהוכחנו בטענה הקודמת שהוא מאונך לישר. הוקטור האדום הוא ההיטל של הירוק על הכחול נסמנו ב- $\underline{w}$.

אורכו של הווקטור האדום הוא בעצם המרחק של הנקודה (x_1,y_1) מהישר $ax+by+c=0$.

$$\underline{w} = \underline{u}_{\underline{v}} = \frac{\underline{u} \bullet \underline{v}}{\underline{v} \bullet \underline{v}} \cdot \underline{v} = \frac{(x_1 - x, y_1 - y) \bullet (a,b)}{(a,b) \bullet (a,b)} \cdot (a,b) =$$

$$\frac{a(x_1 - x) + b(y_1 - y)}{a^2 + b^2} \cdot (a,b) = \frac{ax_1 + by_1 - (ax + by)}{a^2 + b^2} \cdot (a,b)$$

$$ax + by + c = 0$$

$$c = -(ax + by)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{w} = \frac{ax_1 + by_1 - (ax + by)}{a^2 + b^2} \cdot (a,b) = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \cdot (a,b)$$

$$|\underline{w}| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \cdot (a,b) \right| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \right| \cdot |(a,b)| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} =$$

$$\left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$